Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat S Centres étrangers 17 juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

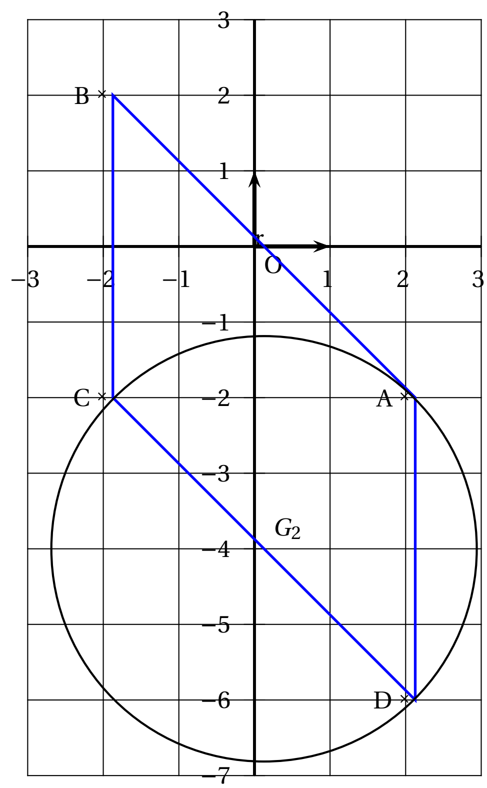
1. Affirmation 1 : VRAI.
   On a $\overrightarrow{\text{AB}}(-3\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}(-2\ ;\ -3\ ;\ -4)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : FAUX.
   On a $\text{A} \in \mathscr{P} \iff 2-2-1+1=0$: vrai
   $\text{C} \in \mathscr{P} \iff 0+4+3+1=0$: faux
   La droite (AC) n'est donc pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
3. Affirmation 3 : VRAI
   Dans l'affirmative un vecteur normal à ce plan serait $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 8\ ;\ -1)$. On a $\overrightarrow{\text{AD}}(-1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = -3+8-5=0$, donc $\overrightarrow{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{\text{AB}}$; de même $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AD}} = -1+0+1=0$, donc $\overrightarrow{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{\text{AD}}$.
   Enfin A appartient à ce plan si ses coordonnées vérifient l'équation proposée soit : $2+8+1-11=0$ qui est vraie
4. Affirmation 4 : FAUX
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AC}) \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = \lambda\overrightarrow{\text{AC}} \iff \left\{\begin{array}{rcr} x-0 &=& -2\lambda\\ y+2 &=& -3\lambda\\ z-3 &=& 4\lambda\end{array}\right.$
   $\iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& -2\lambda\\ y &=& -2-3\lambda\\ z &=& 3+4\lambda\end{array}\right.$ En prenant $k=-\lambda$ on obtient : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2k\\ y &=& -2+3k\\ z &=& 3-4k\end{array}\right.$.
5. Affirmation 5 : FAUX
   On a $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}} = -25$: ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, les droites non plus.
6. Affirmation 6 : FAUX
   On a $d(\text{C},\ \mathscr{P}) = \dfrac{|8|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.
7. Affirmation 7 : VRAI
   On a $d(\text{D},\ \mathscr{P}) = \dfrac{|1-2-2+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. La distance de D au plan est égale au rayon de la sphère, donc la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est bien tangente au plan $\mathscr{P}$.
8. Affirmation 8 : VRAI
   La perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant C a pour équations paramétriques :
   $\left\{\begin{array}{rcr} x-0 &=& \lambda\\ y+2 &=& -2\lambda\\ z-3 &=& \lambda\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& \lambda\\ y &=& -2-2\lambda\\ z- &=& 3+\lambda\end{array}\right.$
   Les coordonnées du point E commun à cette droite et au plan vérifie l'équation de $\mathscr{P}$ soit $\lambda-2(-2-2\lambda)+3+\lambda+1=0 \iff \lambda+4+4\lambda+4+\lambda=0 \iff 6\lambda+8=0 \iff \lambda=-\dfrac{4}{3}$.
   On a donc $\text{E}\left(-\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $z^2+4z+8=0 \iff (z+2)^2-4+8=0 \iff (z+2)^2=-4 \iff (z+2)^2=(2\text{i})^2$, d'où les deux solutions $z_1=-2+2\text{i}$ et $z_2=-2-2\text{i}$.
On a $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.
D'où $z_1=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}}$.
De même $z_2=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\text{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\text{e}^{-\frac{3\text{i}\pi}{4}}$.

2. Figure :



a. Par définition de la rotation :$z_C-z_O=\text{i}(z_B-z_O) \iff z_C=\text{i}(-2+2\text{i})=-2-2\text{i}=z_2$

b. On a : $z_D-z_A=\text{i}(z_C-z_A) \iff z_D=2-2\text{i}+\text{i}(-2-2\text{i}-2+2+2\text{i})=2-6\text{i}$

c. On a $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,4)$ et $\overrightarrow{DC}(-4\,;\,4)$, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \iff$ (ABCD) est un parallélogramme

3. a. Par définition G_α existe car $1-1+\alpha\neq 0$ et $1\,\overrightarrow{G_\alpha A}-1\,\overrightarrow{G_\alpha B}+\alpha\,\overrightarrow{G_\alpha C}=\overrightarrow{0} \iff \alpha\,\overrightarrow{CG_\alpha}=\overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{CG_\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}$ (puisque $\alpha\neq 0$).

b. L'égalité précédente montre que les vecteurs $\overrightarrow{CG_\alpha}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires, donc que le point G_α appartient à la parallèle à la droite (AB) contenant C. Comme $\alpha\in\mathbb{R}*$, $\dfrac{1}{\alpha}\in\mathbb{R}*$, donc G_α ne peut être en C.
L'ensemble des points G_α est donc la parallèle à (BA) contenant C ou encore la droite (CD) privée du point C puisque (ABCD) est un parallélogramme.

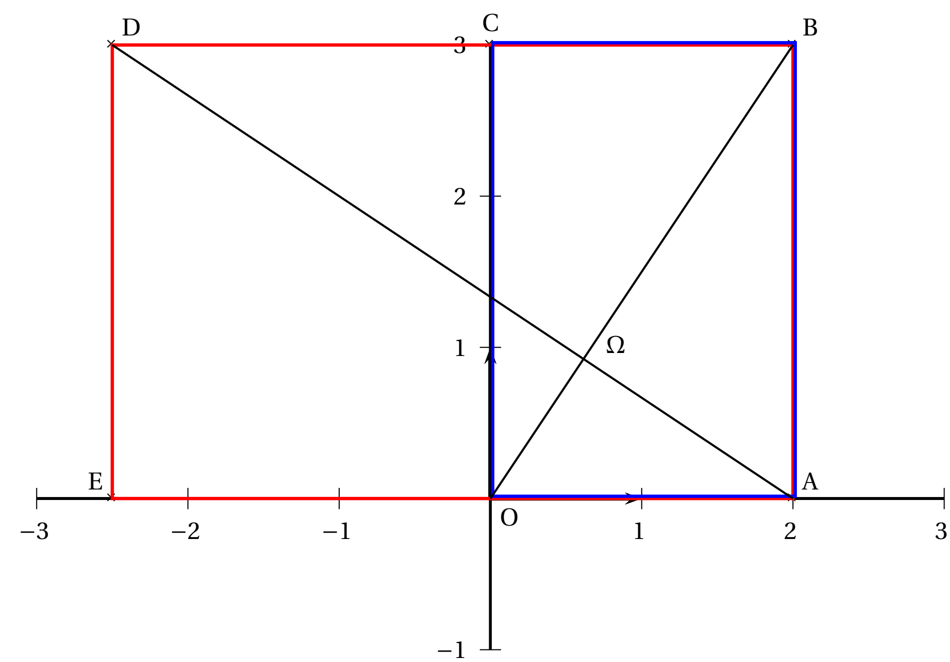
c. Par définition (ABCD) est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0} \iff$ D est le barycentre du système {(A, 1), (B, −1), (C, 1).
Conclusion $G_\alpha=\text{D}$ pour $\alpha=1$.

On a donc G_2 barycentre de (A, 1), (B, -1) et (C, 2) équivaut à $\overrightarrow{G_2\text{A}} - \overrightarrow{G_2\text{B}} + 2\overrightarrow{G_2\text{C}} = \overrightarrow{0}$.
Donc $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 4\sqrt{2} \iff$
$\left\|\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2\text{A}} - \overrightarrow{MG_2} - \overrightarrow{G_2\text{B}} + 2\overrightarrow{MG_2} + 2\overrightarrow{G_2\text{C}}\right\| = 4\sqrt{2} \iff 2\overrightarrow{MG_2} = 4\sqrt{2} \iff$
$2G_2M = 4\sqrt{2} \iff G_2M = 2\sqrt{2}$.
Cette dernière égalité montre que les points M appartiennent au cercle de centre G_2 de rayon $2\sqrt{2}$.
Construction : comme $\overrightarrow{\text{C}G_2} = \dfrac{1}{2}\text{BA}$, on en déduit que G_2 est le milieu de [CD] et on a facilement $G_2\text{D} = 2\sqrt{2} = G_2\text{C}$.
L'ensemble cherché est donc le cercle centré au milieu de [CD] et de diamètre [CD] .

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Figure :



2. On a $\overrightarrow{\text{OA}}(2\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\text{CB}}(2\ ;\ 0)$, donc $\overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{\text{CB}} \iff$ (OABC) est un parallélogramme ; de plus $\text{OB} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ et $\text{AC} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$, donc AC = OB ce qui montre que (OABC) est un rectangle.
De même $\overrightarrow{\text{AE}}(-4,5\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\text{BD}}(-4,5\ ;\ 0)$, donc (ABDE) est un parallélogramme et comme (AB) est perpendiculaire à (AE), (ABDE) est un rectangle.
De plus le format (rapport longueur sur largeur) de ces deux rectangles est égal à $\dfrac{3}{2}$: ils sont donc semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a. L'écriture complexe de la similitude complexe s est $z' = az + b$.
$\text{A} = s(\text{O}) \iff 2 = b$;
$\text{B} = s(\text{A}) \iff 2 + 3\text{i} = b$;
On obtient donc $b = 2$ et $a = \dfrac{3}{2}\text{i}$.

$$s :\quad z \longmapsto z' = \frac{3}{2}\text{i}z + 2.$$

b. On a $z_{s(\mathrm{B})} = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})+2 = -\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i} = z_{\mathrm{D}}$ et comme les rectangles sont semblables, l'image de C est E.

c. L'image de la droite (OA) est la droite (AB) : l'angle de la similitude est donc égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

d. On a $s\circ s(\mathrm{O}) = \mathrm{B}$, $s\circ s(\mathrm{A}) = \mathrm{D}$. Cette composée de similitudes est une similitude d'angle π, donc O, Ω et B d'une part, A, Ω et D d'autre part sont alignés : Ω appartient donc aux droites (OB) et (AD). D'où la position du point Ω.

4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

a. L'écriture complexe de la similitude indirecte est $z' = a\overline{z}+b$.
On a donc $z_{s(\mathrm{O})} = z_{\mathrm{B}} = az_{\mathrm{O}}+b \iff 2+3\mathrm{i} = b$, et d'autre part
$z_{s(\mathrm{A})} = z_{\mathrm{A}} \iff 2 = 2a+b$.
On en déduit que $b = 2+3\mathrm{i}$ et $a = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

$$s'; \quad z \longmapsto z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}\overline{z}+2+3\mathrm{i}.$$

b. On a $z_{s'(\mathrm{B})} = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}(2-3\mathrm{i}+2+3\mathrm{i} = -3\mathrm{i}-\dfrac{9}{2}+2+3\mathrm{i} = -\dfrac{5}{2} = z_{\mathrm{E}}$ et comme les rectangles sont semblables l'image de C est D.

c. Soit F$(x\,;\,y)$ un point fixe de s' ; on a donc $x+\mathrm{i}y = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)+2+3\mathrm{i}$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\dfrac{3}{2}y+2 \\ y &=& -\dfrac{3}{2}x+3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& 4 \\ 3x+2y &=& 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

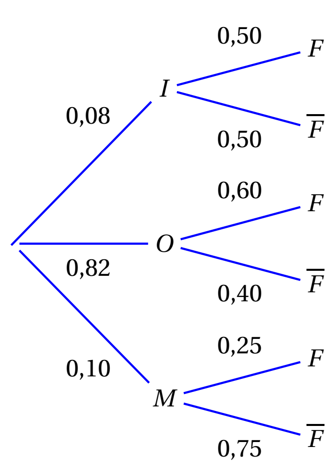
Il y a donc un seul point fixe, le point A.
De $z' = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\overline{z}+2+3\mathrm{i}$ et $2 = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\times 2+2+3\mathrm{i}$, on obtient par différence :
$z'-2 = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\left(\overline{z}-2\right)$.
On voit que si on nomme σ la réflexion d'axe (OA) ; on a $\sigma(z) = z_1$, puis $z'-2 = -\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\left(z_1-2\right)$, donc M' est l'image de M_1 d'affixe z_1 par la similitude directe de rapport $\dfrac{3}{2}$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point A.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

I. Partie A

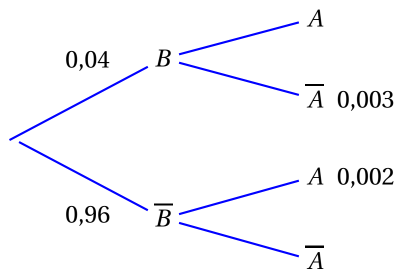
1. Arbre de probabilités :



2. **a.** $p(M) = 1 - 0,08 - 0,82 = 0,10$.
   b. $p(M \cap F) = 0,10 \times 0,25 = 0,025$.
   c. $p(F) = p(F \cap I) + p(F \cap O) + p(F \cap M) = 0,08 \times 0,5 + 0,82 \times 0,6 + 0,1 \times 0,25 = 0,557$.

II. Partie B

1. On a l'arbre suivant :



On a $p\left(B \cap \overline{A}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{A}\right) \iff p_B\left(\overline{A}\right) = \dfrac{p\left(B \cap \overline{A}\right)}{p(B)} = \dfrac{0,003}{0,04} = \dfrac{3}{40}$.

On en déduit que $p_B(A) = 1 - \dfrac{3}{40} = \dfrac{37}{40}$.

D'où $p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A) = 0,04 \times \dfrac{37}{40} = 0,037$.

2. $p(B \cap A) + p\left(\overline{B} \cap A\right) = 0,04 \times \dfrac{37}{40} + 0,002 = 0,037 + 0,002 = 0,039$.

3. $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A} = \dfrac{0,037}{0,039} = \dfrac{37}{39}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

I. Restitution organisée des connaissances

II. Étude d'une fonction f

1. **a.** La fonction u somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur ce même intervalle et
$u'(x) = 3x^2 + 2 \times \dfrac{1}{x} > 0$ comme somme de termes positifs. Donc la fonction u est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. On a $u(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$.
   Conclusion : $u(x) > 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ et $u(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$.

2. Étude de la fonction f

   a. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   On a $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ la seconde fonction quotient ayant un dénominateur non nul : elle est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et
   $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{u(x)}{x^3}$.
   Donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ puisque $x^3 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   D'après la question **1. b.** on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ et
   $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$.
   D'où le tableau de variations de la fonction f :

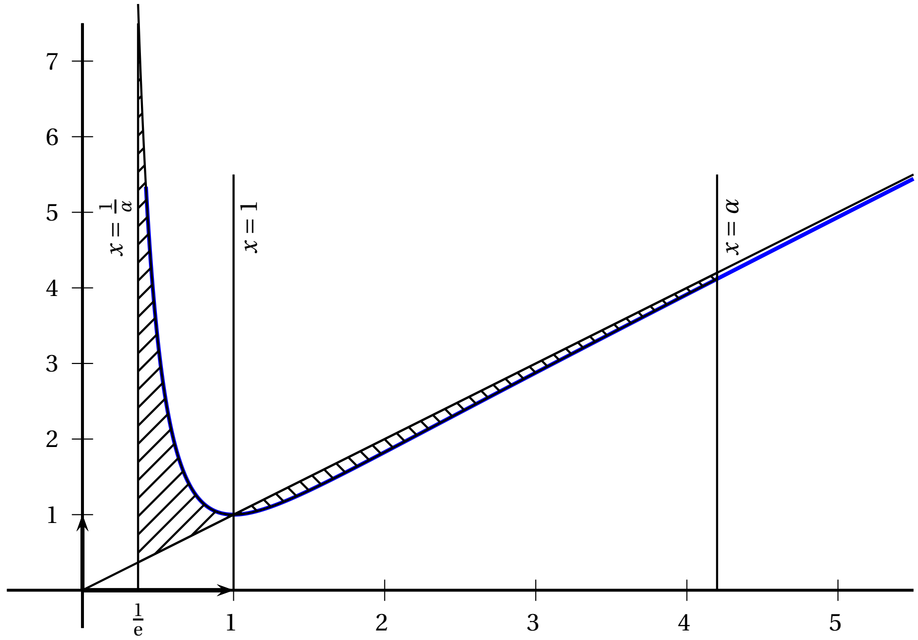
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. Éléments graphiques et tracés.

   a. Comme $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0$, ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

   b. Comme $-\dfrac{\ln x}{x^2} < 0$ pour $x > 1$, ceci montre que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de (Δ) à partir du point $(1\ ;\ 1)$.
   Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$, $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ.
   $\mathcal{C}$ et Δ sont sécantes en $(1\ ;\ 1)$.

   c. Figure



Calculs d'aires

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. On a vu que pour $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant x$; donc $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \left(x - \left[x - \frac{\ln x}{x^2}\right]\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   On pose :
   $$\left\{\begin{array}{lllllll} u(x) & = & \ln x & & u'(x) & = & \dfrac{1}{x}\\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x^2} & & v(x) & = & -\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$
   Toutes ces fonctions étant dérivables sur $[1~;~+\infty[$ on peut intégrer par parties et;
   $\mathscr{A}(\alpha) = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^{\alpha} + \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 0 + 1 = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$, on a
   $$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = \ell = 1.$$

3. Comme $\mathrm{e} > 2$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \dfrac{1}{2} < 1$. On a vu que dans ce cas la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite (Δ), donc :
   $$\mathscr{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \left[-\frac{\ln x}{x^2}\right] \mathrm{dx}$$
   En intégrant par parties comme précédemment les fonctions étant dérivables sur $[\alpha~;~1]$, on obtient
   $$\mathscr{A}(\alpha) = \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{1} = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$
   En particulier $\mathscr{A}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 - \dfrac{\ln \frac{1}{\mathrm{e}}}{\frac{1}{\mathrm{e}}} - \dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = 1 - \dfrac{-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} - \dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = 1 = \ell$.