Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane 6 septembre 2018

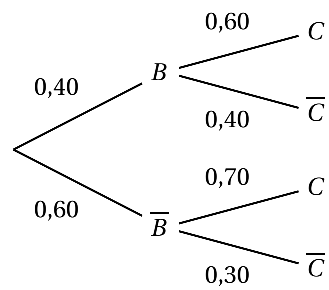
Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1.



2. Il faut calculer $p(C)$; d'après la loi des probabilités totales, on a :
$p(C) = p(B\cap C) + p\left(\overline{B}\cap C\right) = p(B)\times p_B(C) + p\left(\overline{B}\right)\times p_{\overline{B}}(C) = 0,4\times 0,6 + 0,6\times 0,7 = 0,24 + 0,42 = 0,66$.

3. Il faut calculer $p_C(B) = \dfrac{p(C\cap B)}{p(C)} = \dfrac{0,24}{0,66} \approx 0,3636$ soit environ $0,364$.

Partie B

1. Il faut trouver $P(X_1 > 247,5)$ soit $P(247,5 < X_1 < 251) + P(X1 > 251) = P(247,5 < X_1 < 251) + 0,5$.
La calculatrice donne $P(247,5 < X_1 < 251) \approx 0,460$, d'où $P(X_1 > 247,5) \approx 0,960$.

2. Il faut trouver la moyenne μ_2 telle que : $P(X_2 > 247,5) = 0,98$.
On sait que si la variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne μ_2 et d'écart-type $\sigma = 2$, alors la variable aléatoire $Z_2 = \dfrac{X_2 - \mu_2}{2}$ suit la loi normale centrée réduite.

$X_2 > 247,5 \iff X_2 - \mu_2 > 247,5 - \mu_2 \iff \dfrac{X_2-\mu_2}{2} > \dfrac{247,5-\mu_2}{2}$ donc
$P(X_2 > 247,5) = 0,98 \iff P\left(Z_2 > \dfrac{247,5-\mu_2}{2}\right) = 0,98$.

On cherche donc μ_2 tel que $P\left(Z_2 > \dfrac{247,5-\mu_2}{2}\right) = 0,98$ sachant que Z_2 suit la loi normale centrée réduite, ou encore $P\left(Z_2 \leqslant \dfrac{247,5-\mu_2}{2}\right) = 1 - 0,98$ c'est-à-dire $P\left(Z_2 \leqslant \dfrac{247,5-\mu_2}{2}\right) = 0,02$.

On trouve à la calculatrice que le nombre β tel que $P\left(Z_2 \leqslant \beta\right) = 0,02$ est environ $-2,054$.

Donc $\dfrac{247,5-\mu_2}{2} \approx -2,054 \iff 247,5 - \mu_2 \approx -4,108 \iff \mu_2 \approx 251,6$.

La variable aléatoire suit donc la loi normale de moyenne $\mu_2 \approx 251,6$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Partie C

On a donc $n = 256$ avec une probabilité de la dirigeante d'avoir 98 % de produits conforme, soit $p = 0,98$.

Les conditions :

- $n \geqslant 30$;

- $n \times p = 256 \times 0{,}98 = 250{,}88 \geqslant 5$;
- $n(1-p) = 256 \times 0{,}02 = 5{,}12 \geqslant 5$ sont vérifiées. On peut donc construire un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$I_{256} = \left[0{,}98 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}98 \times 0{,}02}{256}}\ ;\ 0{,}98 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}98 \times 0{,}02}{256}}\right]$ soit $I_{256} \approx [0{,}96285\ ;\ 0{,}99715]$.

On peut prendre $I_{256} \approx [0{,}962\ ;\ 0{,}998]$.

Or la fréquence de produits conformes est $\dfrac{248}{256} = 0{,}968\,75 \in I_{256}$.

Ce contrôle ne remet pas en cause l'affirmation de la dirigeante.

EXERCICE 2 **6 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

$$f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On peut conjecturer que la limite de f_2 au voisinage de moins l'infini est moins l'infini et que la limite au voisinage de plus l'infini est 0.
2. f_2 semble être croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ puis décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.
3. Voir le tracé de la tangente sur l'annexe. Une équation de T_2 doit être $y = 2 - x$.
4. Voir l'annexe.

Partie B

$$f_m(x) = (x+m)\mathrm{e}^{-x}$$

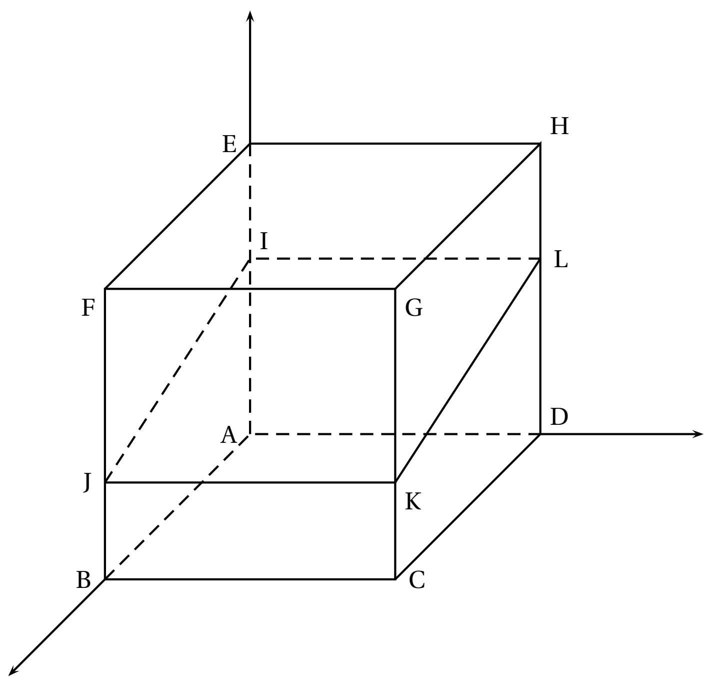
1. Quel que soit le réel m, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+m = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$,d'où par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$.
   $f_m(x) = x\mathrm{e}^{-x} + m\mathrm{e}^{-x}$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} m\mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = 0$.
2. On a par dérivée d'un produit :
   $f'_m(x) = 1\mathrm{e}^{-x} - (x+m)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x-m)$.
3. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f'_m(x)$ est celui de $1-x-m$.
   Or $1-x-m > 0 \iff x < 1-m$: sur $]-\infty\,;\,1-m]$, la fonction f_m est croissante de moins l'infini à $f_m(1-m) = (1-m+m)\mathrm{e}^{1-m} = \mathrm{e}^{1-m}$.
   $1-x-m < 0 \iff x > 1-m$: sur $]1-m\,;\,+\infty]$, la fonction f_m est décroissante de $f_m(1-m) = \mathrm{e}^{1-m}$ à 0.
4. **a.** On sait qu'une équation de T_m est $y - f_m(0) = f'_m(0)(x-0)$.
   Or $f_m(0) = m$ et $f'_m(0) = 1-m$.
   Donc une équation de T_m est $y - m = x(1-m)$ ou $y = (1-m)x + m$.

   b. On voit facilement que si $x = 1$, alors $y = 1$: toutes les droites T_m contiennent le point de coordonnées $(1\,;1)$.
5. f_m est croissante sur $]-\infty\,;\,1-m]$ de moins l'infini à $\mathrm{e}^{1-m} > 0$. Étant continue car dérivable sur cet intervalle elle s'annule donc une seule fois en $x = -m$.
   Conclusion : $f_m(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-m[$ et $f_m(x) > 0$ sur $]-m\,;\,+\infty[$.
6. **a.** $\displaystyle\int_{-2}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t = [F_2(t)]_{-2}^{x} = F_2(x) - F(-2) = -(x+3)\mathrm{e}^{-x} - \left[-(-2+3)\mathrm{e}^{-(-2)}\right] =$
   $-(x+3)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^2$.

   b. On a $-(x+3)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x}$. Or
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} -(x+3)\mathrm{e}^{-x} = 0$ et
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{-2}^{6} f_2(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^2$.
   La limite de l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = t$ quand t tend vers plus l'infini est égale à e^2.

EXERCICE 3 **4 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS



On note $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $4x + 15z - 9 = 0$.

1. Les coordonnées de I vérifient : $4x + 15z - 9 = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, donc $z = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$. $\text{I}\left(0\,;\,0\,;\,\frac{3}{5}\right)$.

Les coordonnées de J vérifient : $4x + 15z - 9 = 0$, $x = 1$ et $y = 0$, donc $z = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$. $\text{J}\left(0\,;\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

2. Volume du prisme IJKLDCBA : la base AIJB a une aire $\dfrac{\text{AI} + \text{BJ}}{2} \times \text{AB} = \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{1}{3}}{2} \times 1 = \dfrac{14}{15} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{15}$.

Comme la hauteur est égale à 1, le volume est aussi égal à $\dfrac{7}{15}$.

Comme le cube a une aire égale à 1, l'autre prisme a un volume égal à :

$1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15}$

3. $\mathscr{P}_2$ est parallèle à $\mathscr{P}_1$ donc une de ses équations est de la forme : $4x + 15z + k = 0$.

Soit N le point d'intersection de $\mathscr{P}_2$ avec l'arête [BF].

M est un point de [EI], donc sa cote z vérifie : $\frac{3}{5} \leqslant z \leqslant 1$.

Les coordonnées de M vérifient : $4x + 15z + k = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, donc $z = -\dfrac{k}{15}$. $\text{M}\left(0\,;\,0\,;\,-\dfrac{k}{15}\right)$.

Les coordonnées de N vérifient : $4x + 15z + k = 0$, $x = 1$ et $y = 0$, donc $z = -\dfrac{k+4}{15}$. $\text{N}\left(0\,;\,0\,;\,-\dfrac{k+4}{15}\right)$.

Le trapèze AMNB a une aire égale à :

$\dfrac{\text{AM} + \text{BN}}{2} \times \text{AB} = \dfrac{-\frac{k}{15} - \frac{k+4}{15}}{2} \times 1 = -\dfrac{2k+4}{15} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{k+2}{15}$.

Comme la hauteur est égale à 1, le volume est aussi égal à $-\dfrac{k+2}{15}$.

On veut que ce volume soit égal à $\frac{1}{2}$, d'où l'équation :

$-\dfrac{k+2}{15} = \dfrac{1}{2} \iff -2k-4 = 15 \iff 2k = -19 \iff k = -\dfrac{19}{2}$.

Une équation de $\mathscr{P}_2$ est donc $4x+15z-\dfrac{19}{2} = 0$.

EXERCICE 4 **5 points**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. • *Initialisation* : $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}^2$.

L'encadrement est vrai au rang 0.

• *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$, on a donc par croissance de la fonction $\sqrt{\ }$, $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e}$ ou encore $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e}$, puis par produit par e :

$\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e} \times \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e} \times \mathrm{e}$ et *a fortiori* $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2$. L'encadrement est héréditaire.

On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de la récurrence on a montré que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$.

2. a. Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\mathrm{e} - \sqrt{u_n}\right)$.

Or on a d'une part $\sqrt{u_n} \geqslant 0$, et on a vu dans la question précédente que $\sqrt{u_n} < \mathrm{e} \iff \mathrm{e} - \sqrt{u_n} > 0$ donc finalement $\sqrt{u_n}\left(\mathrm{e} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant \mathrm{e}^2$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(\mathrm{e} \times \sqrt{u_n}\right) - 2 = \ln \mathrm{e} + \ln\sqrt{u_n} - 2 = 1 - 2 + \dfrac{1}{2}\ln u_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(\ln u_n - 2) = \dfrac{1}{2}v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$.

b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. Or $v_n = \ln(u_n) - 2 \iff \ln(u_n) = v_n + 2 = 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff u_n = \mathrm{e}^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

d. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^2$.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »

Si $u_0 = 2018$, alors $u_1 = \mathrm{e} \times \sqrt{2018} \approx 122{,}1 < u_0$.

L'affirmation est fausse.

Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »

L'affirmation est vraie car l'initialisation de la récurrence est encore valable : $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}^2$, donc l'encadrement est encore vrai.

Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

La suite (u_n) est constante si et seulement si quel que soit n, $u_{n+1} = u_n \iff \mathrm{e} \times \sqrt{u_n} = u_n \iff \mathrm{e} \times \sqrt{u_n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n} \iff \mathrm{e} = \sqrt{u_n} \iff u_n = \mathrm{e}^2$.

L'affirmation est fausse.

EXERCICE 4 **5 points**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 3u_n + 1 \iff 1u_{n+1} - 3u_n = 1$: cette égalité montre que les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2.
- si u_n est pair, $3u_n$ l'est aussi et $3u_n + 1$ est impair donc u_{n+1} est impair ;
- si u_n est impair, $3u_n$ l'est aussi et $3u_n + 1$ est pair donc u_{n+1} est pair.

Donc u_0 est pair, u_1 est impair, u_2 est pair, …

3. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 13$, $u_4 = 40$, $u_5 = 121$: 5 est premier et $u_5 = 11^2$ n'est pas premier : l'affirmation est fausse.

4. a. *Initialisation* : $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2u_0$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $2u_n = 3^n - 1$, alors

$u_{n+1} = 3u_n + 1$, donc $2u_{n+1} = 2(3u_n + 1) = 2 \times 3u_n + 2 = 3 \times 2u_n + 2 = 3 \times (3^n - 1) + 2 = 3^{n1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

On a montré que la relation est vraie au rang 0 et que si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang suivant $n + 1$: d'après le principe de récurrence on a donc montré que pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.

b.

n	3^n	$3^n \equiv \ldots [7]$
1	3	3
2	9	2
3	27	6
4	81	4
5	243	5
6	729	1

Le plus petit naturel non nul tel que $3^n \equiv 1\ [7]$ est donc 6.

c. $2\,022 = 6 \times 337$.

On a donc d'après la relation démontrée par récurrence :

$2u_{2\,022} = 3^{2\,022} - 1 = 3^{6\times 337} - 1 = \left(3^6\right)^{337}$.

D'après la question précédente $3^6 \equiv 1\ [7]$, donc

$2u_{2\,022} \equiv 1^{337} - 1\ [7]$ ou $2u_{2\,022} \equiv 1 - 1\ [7]$, d'où

$2u_{2\,022} \equiv 0\ [7]$, donc $2u_{2\,022}$ est un multiple de 7 et comme 2 est premier avec 7, $u_{2\,022}$ est un multiple de 7.

5. a. $u_0 = 0 \equiv 0\ [5]$

$u_1 = 4 \equiv 4\ [5]$

$u_2 = 13 \equiv 3\ [5]$

$u_3 = 40 \equiv 0\ [5]$

$u_4 = 121 \equiv 1\ [5]$

b.

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5	1	4	2	0	3

c. Si pour tout entier naturel n, u_n est congru à 4 modulo 5, $3u_n$ est aussi congru à 2 modulo 5 et $3u_n + 1 = u_{n+1}$ est congru à 3 modulo 5.

De même d'après le tableau de la question précédente :

u_{n+2} est congru à 0 modulo 5 ;

u_{n+3} est congru à 1 modulo 5 ;

u_{n+4} est congru à 4 modulo 5 et ainsi de suite.

d. D'après la question précédente les restes des divisions euclidiennes de u_n par 5 sont de façon cyclique : 4, 3, 0, 1 : on ne peut donc avoir comme reste 2.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2