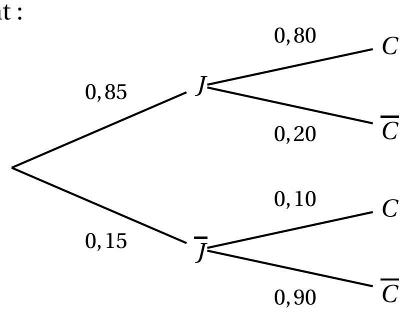
Corrigé du baccalauréat S – Antilles-Guyane juin 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** L'arbre pondéré est le suivant :



b. D'après l'arbre :

$$p\left(\overline{J}\cap C\right) = 0{,}15 \times 0{,}10 = 0{,}015.$$

c. J et $\overline{J}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$p(C) = p\left(\overline{J}\cap C\right) + p(J\cap C) = 0{,}015 + 0{,}85 \times 0{,}80 = 0{,}695.$$

d. Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$p_C\left(\overline{J}\right) = \frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)} = \frac{0{,}015}{0{,}695} \approx 0{,}0216.$$

2. À l'aide de la calculatrice : $p(87 \leqslant X \leqslant 89) \approx 0{,}2417$.
3. De même $p(X \geqslant 91) \approx 0{,}3085$.

Partie B

1. L'échantillon est de taille $n = 120$. L'hypothèse formulée est que la probabilité p qu'une huître possède une masse supérieure à 91 g est $p = 0{,}60$. On a alors :
   - $n \geqslant 30$;
   - $np = 72 \geqslant 5$;
   - $n(1-p) = 48 \geqslant 5$.

   Les trois conditions pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont réalisées, et cet intervalle I est donné par :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}5123\ ;\ 0{,}6877]$$

2. La fréquence observée d'huîtres pesant plus de 91 g est $F = \dfrac{65}{120} \approx 0{,}5417$.
   On a $F \in I$, l'hypothèse selon laquelle $p = 0{,}60$ ne peut être rejetée.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	↘	2	↗

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

2. **Étude en** $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ donc, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Étude en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et, par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{1\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}\\
&= 1 + \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}\\
&= 1 + \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}\\
&= \frac{\mathrm{e}^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x}\\
&= \mathrm{e}^{-x} g(x).
\end{aligned}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x, $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle $\mathbb{R}$ a pour image $\mathbb{R}$, ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ une solution α unique.
Par ailleurs, $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $-1 < \alpha < 0$.

6. **a.** La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x+1.$$

b. Posons, pour tout réel x, $k(x) = f(x) - (2x+1)$, alors :

$$\begin{aligned}
k(x) &= x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - (2x+1)\\
&= \frac{x}{\mathrm{e}^x} - x\\
&= \frac{x}{\mathrm{e}^x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right).
\end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-\text{e}^{x}$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est située en dessous de T.

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$H'(x) = -\text{e}^{-x} + (-x-1)\left(-\text{e}^{-x}\right) = \text{e}^{-x}(x+1-1) = x\text{e}^{-x} = h(x),$$

la fonction H est donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. Sur [1 ; 3], $\mathscr{C}$ est en dessous de T, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_3^4 \left((2x+1)-f(x)\right)\text{d}x\\ &= \int_1^3 x - h(x)\text{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2} - H(x)\right]_1^3\\ &= 4+4\text{e}^{-3}-2\text{e}^{-1}.\end{aligned}$$

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. La proposition est **fausse**; en effet, on a : $\overrightarrow{AB}(-2\,;\,4\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;\,-12\,;\,3)$, ces deux vecteurs sont colinéaires (car $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$), donc les trois points A, B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.
2. La proposition est **vraie** car on vérifie aisément que les coordonnées de chacun des points A, B et D vérifient l'équation $x-2z+9=0$.
3. La proposition est **fausse** : la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{2}\,;\,-3\,;\,-\frac{3}{2}\right)$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il ne peut diriger (AC).
4. La proposition est **fausse** : le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(2\,;\,-1\,;\,5)$, le plan $\mathscr{P}'$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'(-3\,;\,-1\,;\,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   b. Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. **a.** Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.
   - **Initialisation.** On a $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4}\times 0{,}5 = 1{,}875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit n entier naturel non nul, et $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire que :

  (HR) $$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k$$

  on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$.
  D'après (HR) :

  $$\begin{array}{rcll} u_n & \geqslant & \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n & \text{donc, en multipliant par } \dfrac{1}{5} : \\ \dfrac{1}{5} u_n & \geqslant & \dfrac{3}{4} \times 0{,}5^n & \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0{,}5^n : \\ \dfrac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n & \geqslant & \dfrac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n & \text{c'est-à-dire :} \\ u_{n+1} & \geqslant & \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n & \end{array}$$

  Or, pour tout entier naturel n, $0{,}5^n \geqslant 0{,}5^{n+1}$, on en déduit donc que :

  $$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$$

  et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.
  La propriété est vraie 1 et si elle est vraie à un rang non nul, n elle est vraie au range suivant $n+1$.
  On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel non nul $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.
- **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

b. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n \\ & = & 3 \times 0{,}5^n - \dfrac{4}{5} u_n \\ & = & \dfrac{4}{5} \left(\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n - u_n \right) \end{array}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} \\ & = & \dfrac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n \\ & = & \dfrac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n \\ & = & \dfrac{1}{5} \left(u_n - 10 \times 0{,}5^n \right) \\ & = & \dfrac{1}{5} v_n. \end{array}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

b. La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c. $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que $u > 0{,}01$	(1)
	n prend la valeur $n+1$	(2)
	u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0{,}5^{n-1}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. x et y sont des entiers naturels tels que $24x + 45y = 438$, par conséquent :

- $24x \leqslant 438$ d'où $x \leqslant \dfrac{438}{24} = 18{,}25$, donc $x \leqslant 18$;
- $45y \leqslant 438$ d'où $y \leqslant \dfrac{438}{45} \approx 9{,}73$, donc $y \leqslant 9$.

b. Voici l'algorithme complété :

Entrée :	x et y sont des nombres	
Traitement :	Pour x variant de 0 à 18	(1)
	Pour y variant de 0 à 9	(2)
	Si $24x + 45y = 438$	(3)
	Afficher x et y	
	Fin Si	
	Fin Pour	
	Fin Pour	
Fin traitement		

c. Le coût total de réservation étant de 438 €, et 438 étant égal à 146×3, ce montant est multiple de 3 !

d. i. Les entiers 8 et 15 étant premiers entre eux, le théorème de Bézout entraîne l'existence d'un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que $8x + 15y = 1$.

ii. On a de façon évidente $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$, le couple $(2\,;\,-1)$ est donc une solution particulière.

iii. On a $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$, donc, en multipliant par 146 :

$$8 \times 292 + 15 \times (-146) = 146.$$

Soit $(x\,;\,y)$ un autre couple solution de (E), alors :

(1) $$8x + 15y = 8 \times 292 + 15 \times (-146) \iff 8(x - 292) = 15(-y - 146).$$

15 et 8 sont premiers entre eux et 15 divise $8(x - 292)$, donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise $x - 292$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $x - 292 = 15k \iff x = 292 + 15k$. La relation (1) entraîne alors que $8 \times 15k = 15(-y - 146)$, d'où $y = -146 - 8k$.

Les couples solutions sont donc de la forme $(292 + 15k\ ;\ -146 - 8k)$.

Réciproquement, de tels couples sont bien solutions de (E) car :

$$8(292 + 15k) + 15(-146 - 8k) = 146.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\left\{(292 + 15k\ ;\ -146 - 8k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e. Soit x et y le nombre de nuitées passées respectivement dans les hébergements A et B, alors $24x + 45y = 438 \Leftrightarrow 8x + 15y = 146$. Il existe alors un entier relatif k tel que $x = 292 + 15k$, et par ailleurs $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 13$, d'où :

$$0 \leqslant 292 + 15k \leqslant 13 \iff -\frac{292}{15} \leqslant k \leqslant -\frac{279}{15}.$$

Comme $-\dfrac{292}{15} \approx -19{,}47$ et $-\dfrac{279}{15} = -18{,}6$, la seule possibilité est que $k = -19$.

On en déduit que $x = 292 + 15 \times (-19) = 7$ et que $y = -146 - 8 \times (-19) = 6$.

Ce randonneur a donc passé 7 nuits en hébergement A et 6 nuits en hébergement B.