Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2013

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.
2. La bonne réponse est $\boxed{\text{c}}$.
   Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{AF}(1~;~0~;~1)$ et $\overrightarrow{BG}(0~;~1~;~1)$, d'où
   $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 1 = 1$.
3. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x + y - z = 0$.
4. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}(1~;~1~;~-1)$, or $\overrightarrow{EC}(1~;~1~;~-1)$. Par conséquent $\overrightarrow{EC}$ est normal à $\mathcal{P}$, et comme $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{EL}$ est de ce fait aussi normal à $\mathcal{P}$.
5. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$.
   On a $\overrightarrow{EC}(1~;~1~;~-1)$ et $E(0~;~0~;~1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t\\ y & = & t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z & = & 1-t\end{array}\right.$. Le point L a donc pour coordonnées $L(t~;~t~;~1-t)$, et comme $L\in\mathcal{P}$ alors :
   $t + t - (1-t) = 0$ d'où l'on tire $t = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $L\left(\frac{1}{3}~;~\frac{1}{3}~;~\frac{2}{3}\right)$, d'où le résultat.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On a :

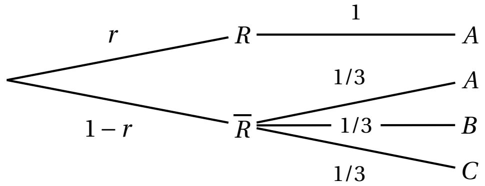
$$\begin{aligned}
f\in\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}~;~p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\iff p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant f\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\iff -f-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant -p\leqslant -f+\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\iff f-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\iff p\in\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$P\left(f\in\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}~;~p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = P\left(p\in\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}~;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)\geqslant 0{,}95$$

Partie B

1. **a.** Arbre pondéré illustrant la situation :



b. On a, d'après l'arbre précédent :

$$P(A) = P(A \cap R) + P\left(A \cap \overline{R}\right) = r + \frac{1}{3}(1-r) = \frac{1}{3}(3r+1-r) = \frac{1}{3}(1+2r).$$

c. On a : $P_A(R) = \dfrac{P(A\cap R)}{P(A)} = \dfrac{r}{\frac{1}{3}(1+2r)} = \dfrac{3r}{1+2r}$.

2. a. L'expérience consiste en une répétition de 400 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où la probabilité de « succès » (c'est-à-dire que l'étudiant ait la bonne réponse) est égale à $P(A)$. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$.

b. On a $n = 400$ et $f = \frac{240}{400} = 0{,}6$, donc $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p est donc :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}55\ ;\ 0{,}65].$$

Ainsi, avec une probabilité supérieure à 95 % :

$$0{,}55 \leqslant p \leqslant 0{,}65$$

or $p = \frac{1}{3}(1+2r)$, donc :

$$0{,}55 \leqslant \frac{1}{3}(1+2r) \leqslant 0{,}65$$

d'où :

$$1{,}65 \leqslant 1+2r \leqslant 1{,}95$$

puis :

$$0{,}325 \leqslant r \leqslant 0{,}475$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r est donc : $[0{,}325\ ;\ 0{,}475]$.

c. i. Ici $r = 0{,}4$, donc $p = \frac{1}{3}(1+2r) = 0{,}6$. La loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}6$ a pour espérance $np = 240$ et pour variance $V = np(1-p) = 96$. On peut alors l'approcher par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma = \sqrt{96}$.

ii. Par lecture de la table fournie (ou utilisation de la calculatrice) :

$$P(X \leqslant 250) = 0{,}846.$$

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc, par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. Pour tout réel $x, f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-1/\mathrm{e}^2$	↗	$+\infty$

Partie B

1. **a.** On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x + 1 - m\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\iff x + 1 = m\mathrm{e}^{-x} \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^{x} = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

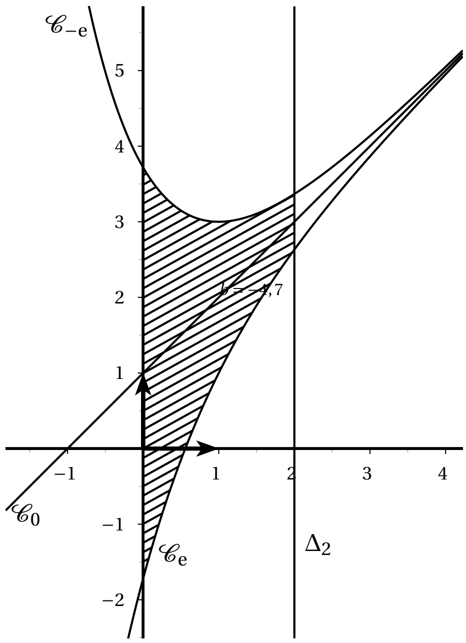
   b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédent :
   - si $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
   - si $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
   - si $-\frac{1}{\mathrm{e}^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
   - si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point.

2.
   - La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -\mathrm{e}$.
   - La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ ou $m = 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
   - Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = \mathrm{e}$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^{x}$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
   - si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
   - si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
   - si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 0$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :

   a.



b. Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ est au dessus de $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, par conséquent l'aire $\mathscr{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a) &= \int_0^a f_{-\mathrm{e}}(x) - f_{\mathrm{e}}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^a \left((x+1)+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right) - \left((x+1)-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^a 2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a\\
&= 2\mathrm{e}\left(-\mathrm{e}^{-a}+1\right)\\
&= 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}.
\end{aligned}$$

On a de plus $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{2}{3}$.

2. a. Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

k	w	u	v
1	0	0,5	0,667
2	1/2	0,583	0,611

(valeurs approchées à 10^{-3} près)

b. Plus généralement, pour un entier N saisi par l'utilisateur, l'algorithme affichera u_N et v_N.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors : $AX_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{u_n+v_n}{2}\\ \frac{u_n+2v_n}{3}\end{pmatrix} = X_{n+1}$.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

- Pour $n = 0$, on a $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$ (ou I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2), donc la propriété est vraie pour $n = 0$
- Supposons que la propriété soit vraie pour tout entier naturel n : $X_n = A^nX_0$, alors : $AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$, c'est-à-dire $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$ et la propriété est donc héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $X_n = A^nX_0$.

4. a. On a :

$$\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{6}{5}\\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

en d'autres termes la matrice P est inversible et son inverse est P'.

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P'B^nP$.

- $A^0 = I_2$, or $P'B^0P = P'I_2P = P'P = I_2$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Supposons que, pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$, alors

$$A^{n+1} = AA^n = P'BPP'B^nP = P'BI_2B^nP = P'BB^nP = P'B^{n+1}P$$

  et la propriété est donc héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $A^n = P'B^nP$.

b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{6}{5}\\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{6}{5}\\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}.$$

5. a. En multipliant la matrice A^n précédente à droite par le vecteur colonne $X_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, on obtient $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}$. D'où l'on tire

$u_n = \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}\left(d\frac{1}{6}\right)^n$ et $v_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(d\frac{1}{6}\right)^n$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{6} < 1$), on obtient par opérations que les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers $\dfrac{3}{5}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

2. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1 + \mathrm{i} + \sqrt{2}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$. On a alors $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. a. Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,804 7	0,333 3
2	0,558 6	0,111 1

b. Plus généralement, pour une valeur de N saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de a_N.

Partie B

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + \mathrm{i}b_{n+1}$ et $z_{n+1} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$, donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) converge vers 0.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \frac{1}{3}\left|z_n + |z_n|\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(|z_n| + |z_n|\right)$, c'est-à-dire : $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

- On a $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Supposons que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$, alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\sqrt{2},$$

  la propriété est donc héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n la propriété est vraie.

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n| \geqslant 0$, donc : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$, le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 0.

c. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

Ainsi, pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |a_n| \leqslant u_n$. Comme (u_n) converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que $(|a_n|)$ converge vers 0, donc que (a_n) converge vers 0.