Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Antilles-Guyane 23 juin 2009 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A, B, C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

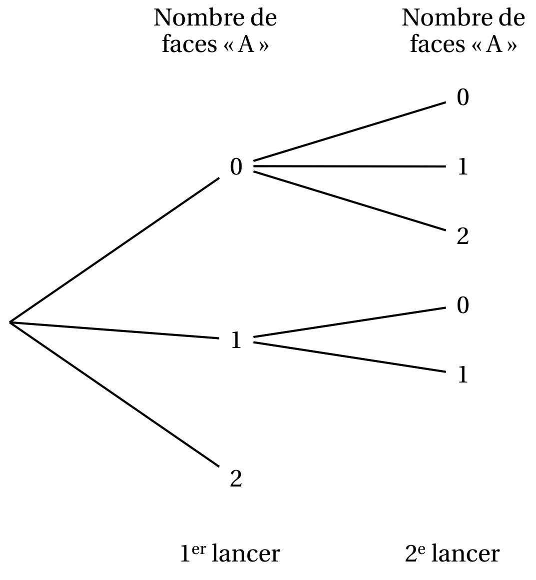
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

— E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,
— E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,
— E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante :

— Le joueur lance les deux dés simultanément.
— Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.
— Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.
— Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\dfrac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.

Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
   On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que
   $$z' = (1+\text{i}\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}.$$
   On note A le point d'affixe 2i.

   Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
2. **Affirmation :** $1991^{2009} \equiv 2\ (7)$.
3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

   Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $na \equiv nb\ (p)$.
4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.
   $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note $\mathscr{S}$ la section de $\mathscr{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.

   Affirmation : $\mathscr{S}$ est un cercle.
5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.
   $\mathscr{P}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

   Affirmation : O le seul point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan $(y\text{O}z)$ à coordonnées entières.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
   Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe -4i et l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |z+4\text{i}|$.

   Affirmation : $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment [AB].
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
   On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2\text{i}$.

   Affirmation : A appartient au cercle de diamètre [BC].
3. On considère le nombre $z = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{7}}$.

   Affirmation : z^{2009} est un nombre réel positif.
4. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.
   On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}}\right\| = 6$.

   Affirmation : $\mathscr{F}$ est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
$\mathscr{S}$ est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.
$\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x+y-5=0$.

Affirmation : Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A.

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t)=10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t=0$, la température de l'objet est 220 ° C.

2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t)=200\,\text{e}^{-\frac{t}{2}}+20.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour un heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.

- **a.** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
- **b.** Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
  En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- **c.** Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

3.
- **a.** Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50° C. On laissera apparents les traits de construction.
- **b.** Retrouver ce résultat par le calcul.

PARTIE B.

On considère la suite de terme général $d_n=f(n)-f(n+1)$ où $n\in\mathbb{N}$. d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

1.
- **a.** Calculer des valeurs approchées au dixième de d_0, d_1 et d_2.
- **b.** Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5° C.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.
Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.