꩜ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord ꩜
30 mai 2014

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On veut $p(X \leqslant 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.
   c. $Z = \dfrac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma' Z + 50$
   $p(X \leqslant 49) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(\sigma' Z + 50 \leqslant 49\right) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$
   On doit donc avoir $-\dfrac{1}{\sigma'} = -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \dfrac{1}{1,555} \approx 0,643$
   La valeur attendue de σ' est donc $0,643$.
3. **a.** Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité $0,06$,... ou pas.
   On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et $0,06$.
   b. On calcule $p(Y \leqslant 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ $0,416$.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \dfrac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0,622 ; 0,792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,
   $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}\left(5 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3\mathrm{e}^{-x}$.
   $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car $\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < 0 < x$.
   Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun d'abscisse x sssi $f(x) = x - 3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
$MN = |f(x) - (x-3)| = |g(x)| = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.
2. Si u est dérivable,$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.
Pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2\times 3\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}$.
3. g étant dérivable sur $[0~;~+\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0~;~+\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
$$\begin{array}{rll} g'(x) \geqslant 0 & \iff 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 & \\ & \iff 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 & \text{on a divisé par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ & \iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \dfrac{5}{6} & \\ & \iff -x \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{6}\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \iff x \leqslant \ln\left(\dfrac{6}{5}\right) & \end{array}$$
En $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
$g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right) = 5\times \mathrm{e}^{\frac{5}{6}} - 3\times\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 5\times\dfrac{5}{6} - 3\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{75}{36}$
La distance entre un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathscr{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\dfrac{75}{36}$ unités.
Remarque : Comme le repère est orthogonal (à priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. $\mathscr{A}(2) = \displaystyle\int_0^2 [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g > 0$ sur $[0;2]$. $\mathscr{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$.
2. La fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}' = g > 0$. La fonction $\mathscr{A}$ est donc bien croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif,
$$\begin{array}{rll} \mathscr{A}(x) & = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t & \\ & = 5\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t & \text{par linéarité de l'intégrale} \\ & = 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - 3\left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x & \\ & = 5\left(-\mathrm{e}^{-x} + 1\right) - 3\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}\right) & \\ & = 5 - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{3}{2} & \\ \mathscr{A}(x) & = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{7}{2} & \end{array}$$

4. $\mathscr{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\text{e}^{-2x} - 5\text{e}^{-x} + \dfrac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\text{e}^{-2x} - 5\text{e}^{-x} + \dfrac{3}{2} = 0$

On pose $X = \text{e}^{-x}$

$$\begin{array}{rlr}
x \text{ solution de } \dfrac{3}{2}\text{e}^{-2x} - 5\text{e}^{-x} + \dfrac{3}{2} = 0 & \iff X \text{ solution de } \dfrac{3}{2}X^2 - 5X + \dfrac{3}{2} = 0 & \\
& \iff X \text{ solution de } 3X^2 - 10X + 3 = 0 & \text{équation du second degré} \\
& \iff X = \dfrac{1}{3} \text{ ou } X = 3 & \\
& \iff \text{e}^{-x} = \dfrac{1}{3} \text{ ou } \text{e}^{-x} = 3 & \text{on revient à } x \text{ et } X = \text{e}^{-x} \\
& \iff x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 & -\ln\dfrac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\
& \iff x = \ln 3 & \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } -\ln 3 < 0
\end{array}$$

Finalement, $\mathscr{A}(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
2. **a.** Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.

   b. L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.

   Plusieurs manières de faire cette construction :

   — On peut construire 2 points de la droite intersection :
   Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).
   Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).
   L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)

   — On peut utiliser un point et la direction
   On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.
   Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).
   L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.
3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
   La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQS.

Partie B

1. $\text{M}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\text{N}\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\text{P}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,1\,;\,1\right)$.
2. L est le point d'intersection de (MP) et (FG). On cherche donc une représentation paramétrique de chacune des deux droites (MP) et (FG).
   (MP) passe par $\text{M}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}t \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

(FG) passe par F (1 ; 0 ; 1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ (0 ; 1 ; 0), une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$\begin{cases} x = 1 \\ y = t' \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

$$L \in (MP)\cap(FG) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4 \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 1 \\ t = 4 \\ t' = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point L sont $\left(1 ; \frac{5}{2} ; 1\right)$.

3. $\overrightarrow{TP}\left(-\frac{3}{4} ; 0 ; \frac{3}{8}\right)$ et $\overrightarrow{TN}\left(0 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{8}\right)$.

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire :

$\overrightarrow{TP} \bullet \overrightarrow{TN} = -\frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \neq 0$

Le triangle TPN n'est donc pas rectangle en T.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. "Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc

$$a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a - n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$

On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire :
		Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. a. Remarque : On peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n\\ &= \tfrac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.}\\ &= \tfrac{3}{4}a_n - 990 &&\\ &= \tfrac{3}{4}(a_n - 1320) &&\\ &= \tfrac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n \end{aligned}$$

On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$. Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n, on a

$u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320 \Leftrightarrow a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n + b_n = 2a_n$ mais la conservation du volume global s'écrira alors $2a_n = 2200 \Leftrightarrow a_n = 1100$

Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n.

$1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1100 \iff 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 220 \iff \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{11}{26} \iff n \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{11}{26}\right)$

Finalement $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{11}{26}\right)}{\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)} \approx 2,99$

On vérifie : $a_3 = 1100,625$ et $b_3 = 1099,375$ avec $a_3 - b_3 < 1$. À la fin du troisième jour, les deux bassins auront le même volume au mètre cube près.