Chapitre 4

PROBABILITÉS DISCRÈTES

I PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

1 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :
Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.
Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.
Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication?
Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ».

— 12% des articles ont a un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = 0{,}12$.
— 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = 0{,}06$ et $p(E) = 0{,}08$.

La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cup E) = p(F) + p(E) - p(F \cap E) \quad \text{d'où} \quad p(F \cap E) = 0{,}08 + 0{,}06 - 0{,}12 = 0{,}02$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2 FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?
Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;
Nous avons $p(V) = 0{,}85$ et $p_V(M) = 0{,}02$.
La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p(V \cap M) = 0{,}02 \times 0{,}85 = 0{,}017$$

II FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

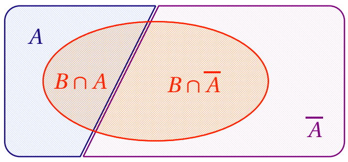
Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$



2 PARTITION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

— Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
— Si les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = 1$$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

EXEMPLE

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

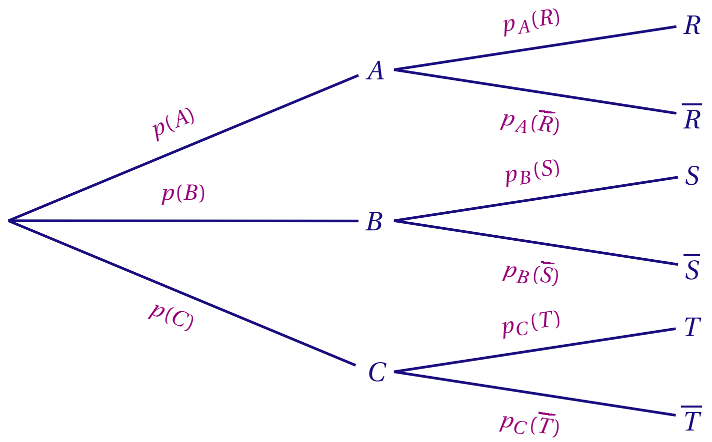
On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?
Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »
Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(S) + p_C(S) \times p(S) \\ &= 0{,}15 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

III REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



— La racine de l'arbre est l'univers Ω

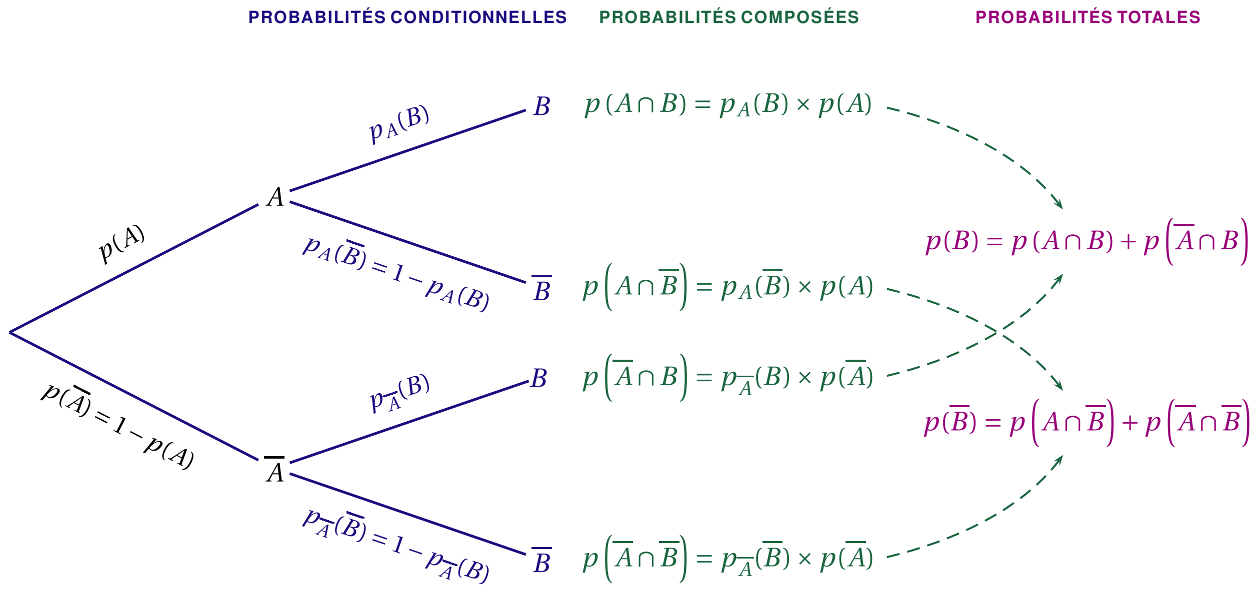
— Les évènements qui se trouvent aux extremités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A,B,C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S,\overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.

— Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.

— Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

RÈGLES

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
— La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.
— La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.



IV ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

1 INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 PROPRIÉTÉ

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$$

3 LOI BINOMIALE

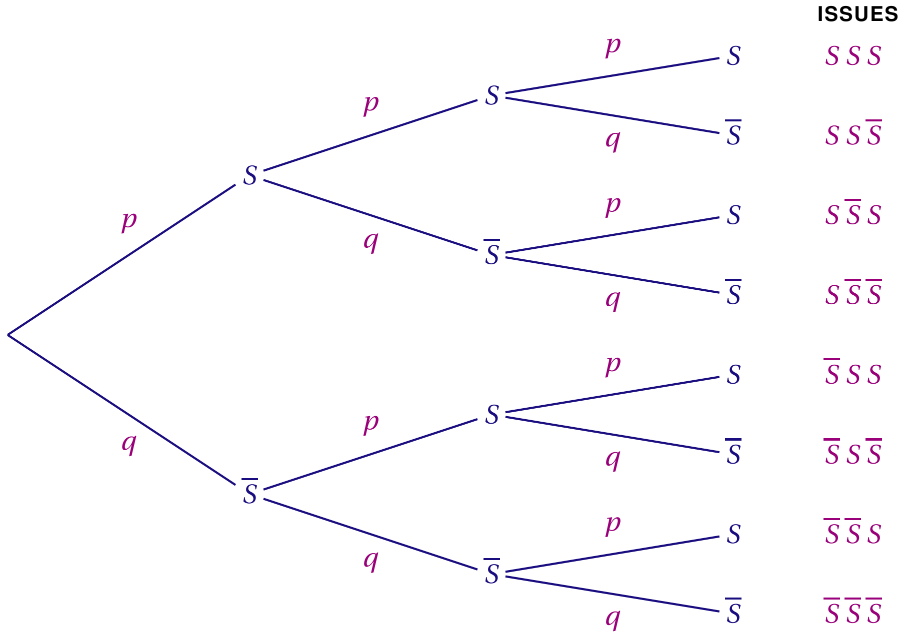
SCHÉMA DE BERNOULLI

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes s'appelle un schéma de Bernoulli.

EXEMPLE

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.
La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'echec est $p(\overline{S}) = 1 - p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{S\,S\,S;\ S\,S\,\overline{S};\ S\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,S\,S;\ S\,\overline{S}\,\overline{S};\ \overline{S}\,S\,\overline{S};\ \overline{S}\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

On répète successivement n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves de Bernoulli répétées.

Dans l'exemple précédent, il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins pour lesquels il y a deux succès

LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès de chaque épreuve est p.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
Cette loi est notée $\mathscr{B}(n;p)$. Elle est définie par :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$

Remarque :

L'évènement « obtenir au moins un succès » est l'évènement contraire de l'évènement F « obtenir n échecs consécutifs » d'où

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n$$

EXEMPLE

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathscr{B}(4;p)$ de paramètres 4 et p (avec $q = 1-p$) est :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	q^4	$4 \times p \times q^3$	$6 \times p^2 \times q^2$	$4 \times p^3 \times q$	p^4