LOIS DE PROBABILITÉ À DENSITÉ

Remarque

Une expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un nombre réel X dans l'intervalle $I =]0 ; 10]$.
L'univers est l'intervalle I. C'est un univers infini. On ne peut pas utiliser les probabilités vues jusqu'à présent et qui s'appliquaient à un univers fini. En effet, puisqu'il y a une infinité de nombres dans l'intervalle I, la probabilité de chacun de ces nombres est nulle et les raisonnements que l'on faisait en additionnant des probabilités d'éventualités ne sont plus applicables. Il faudra dans ce cas raisonner sur des probabilités d'intervalles.

Exercice 01

On considère l'intervalle $I =]0 ; 10]$ et on s'intéresse à l'expérience consistant à choisir de façon aléatoire un nombre réel dans cet intervalle.

1°) On coupe l'intervalle I en 10 intervalles de même amplitude :
$]0 ; 1]$; $]1 ; 2]$; $]2 ; 3]$; $]3 ; 4]$; $]4 ; 5]$; $]5 ; 6]$; $]6 ; 7]$; $]7 ; 8]$; $]8 ; 9]$; $]9 ; 10]$
On considère l'univers Ω que l'on obtient en prenant la borne supérieure de chaque intervalle et on choisit la probabilité uniforme sur Ω.
On a $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 \}$ et chaque éventualité de Ω a une probabilité de $\frac{1}{10}$.
On choisit de façon aléatoire un nombre réel X dans Ω.
Justifier que la probabilité de l'événement « X est inférieur ou égal à π », notée $p(X \leqslant \pi)$, est égale à $\frac{3}{10}$.

2°) On coupe l'intervalle I en 100 intervalles de même amplitude :
$]0 ; 0{,}1]$; $]0{,}1 ; 0{,}2]$; $]0{,}2 ; 0{,}3]$; ...... ; $]9{,}8 ; 9{,}9]$; $]9{,}9 ; 10]$
On considère l'univers $\Omega = \{ 0{,}1 ; 0{,}2 ; 0{,}3 ; \dots ; 9{,}8 ; 9{,}9 ; 10 \}$ et la probabilité uniforme sur Ω.
On choisit de façon aléatoire un nombre réel X dans Ω. Déterminer $p(X \leqslant \pi)$.

3°) Même question que précédemment en coupant l'intervalle I en 1 000 intervalles de même amplitude, puis en 10 000 intervalles de même amplitude. (On ne demande pas de justification)

4°) Si on choisit de façon aléatoire un nombre réel X dans l'intervalle I, conjecturer la valeur de $p(X \leqslant \pi)$.
Conjecturer les valeurs de $p(X \leqslant 4)$; $p(X > 1)$; $p(1 < X \leqslant 4)$; $p(u < X \leqslant v)$ avec $u \in I$; $v \in I$ et $u < v$.

5°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = \frac{1}{10}$.

a) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction f.

b) Déterminer l'aire A_1 de la partie du plan comprise entre l'axe (Ox), la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

c) Déterminer l'aire A_2 de la partie du plan comprise entre l'axe (Ox), la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = u$ et $x = v$; où u et v sont deux réels de I tels que $u \leqslant v$.

Exercice 02

On considère l'algorithme ci-contre permettant d'obtenir 1 000 fois, de façon aléatoire, un nombre réel X compris entre 0 et 10 et d'évaluer la fréquence avec laquelle on a $X \leqslant \pi$.

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  compte EST_DU_TYPE NOMBRE
  freq EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  compte PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 1000
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR 10*random()
    SI (x<=Math.PI) ALORS
      DEBUT_SI
      compte PREND_LA_VALEUR compte+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  freq PREND_LA_VALEUR compte/1000
  AFFICHER freq
FIN_ALGORITHME
```

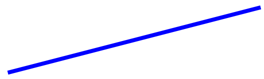
1°) Expliquer cet algorithme et le tester avec AlgoBox.
Quels résultats obtient-on pour la fréquence ?

2°) Modifier l'algorithme pour faire 100 000 choix d'un nombre aléatoire compris entre 0 et 10.
Évaluer, avec cet algorithme modifié, la fréquence avec laquelle on a $X \leqslant \pi$.

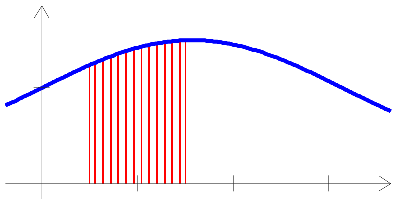
3°) Modifier l'algorithme de façon à évaluer, en fonction de deux réels u et v compris entre 0 et 10, la fréquence avec laquelle on a : $u < X \leqslant v$.

4°) Les résultats trouvés sont-ils en accord avec les résultats obtenus dans l'exercice 1 ?

Remarques



- Un segment d'une certaine longueur est constitué d'une infinité de points ayant chacun une longueur nulle.

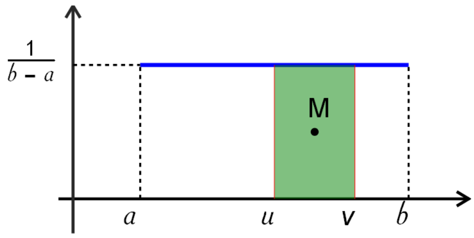


- L'aire d'une partie du plan peut-être calculée en utilisant une intégrale. Pourtant cette partie du plan est constituée d'une infinité de segments ayant chacun une aire nulle.
- De la même façon on peut définir une loi de probabilité sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, en utilisant une intégrale.
  Et ceci même si chaque nombre de $[a\ ;\ b]$ a une probabilité nulle. La fonction que l'on intègrera sera appelée fonction de densité de la loi probabilité.

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un intervalle $[a\ ;\ b]$.
On dit que X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ lorsque pour tout $u \in [a\ ;\ b]$ et tout $v \in [a\ ;\ b]$ tels que $u \leqslant v$

on a $p(u \leqslant X \leqslant v) = \displaystyle\int_u^v \frac{1}{b-a}\,dx$



c'est-à-dire que $p(u \leqslant X \leqslant v)$ est égale à l'aire, en unités d'aire,

de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $\begin{cases} u \leqslant x \leqslant v \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$

où la fonction f est définie sur $[a\ ;\ b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

Cette fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

Remarques

- Dans le cas d'une loi uniforme, l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $\begin{cases} u \leqslant x \leqslant v \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est un rectangle et on a de façon évidente $p(u \leqslant X \leqslant v) = (v-u) \times \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{v-u}{b-a}$.
- La valeur $\dfrac{1}{b-a}$ a été choisie de telle façon que $p(a \leqslant X \leqslant b) = 1$.
- On pourra utiliser la notation $p(u \leqslant X \leqslant v) = p([u\ ;\ v])$.
- On a $p(X = u) = 0$ et $p(X = v) = 0$, donc $p([u\ ;\ v]) = p(]u\ ;\ v]) = p([u\ ;\ v[) = p(]u\ ;\ v[)$.
- Il est parfois utile que la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ soit définie sur $\mathbb{R}$.
  Dans ce cas, on prendra $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ pour $x \in [a\ ;\ b]$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin [a\ ;\ b]$.

Exercice 03

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1\ ;\ 1]$.
Déterminer : $p(X \leqslant 0{,}3)$; $p\left(-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)$; $p(X > 0{,}3)$; $p\left(X \in \left]\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right[\right)$; $p\left(X \notin \left[\frac{1}{6}\,;\frac{1}{2}\right]\right)$

Exercice 04

Julie doit aller dans un magasin qui ouvre à 8h30. Elle s'y rend en bus et elle arrive entre 8h et 9h30.
Son heure d'arrivée T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8\ ;\ 9{,}5]$.
Quelle est la probabilité que Julie arrive avant l'ouverture du magasin ?
La direction a décidé, sans l'annoncer publiquement, que toutes les personnes qui entreraient dans le magasin entre 9h et 9h15 recevraient un cadeau. Quelle est la probabilité que Julie reçoive un cadeau ?

Exercice 05

On choisit un nombre réel α au hasard dans $[0\ ;\ 1]$.
Quelle est la probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le premier nombre après la virgule soit un 3 ?
Quelle est la probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le premier nombre après la virgule soit pair ?
Sachant que ce nombre α est supérieur à 0,6 quelle est la probabilité qu'il soit inférieur à 0,95 ?
Sachant que ce nombre α est supérieur à 0,963 quelle est la probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le deuxième chiffre après la virgule soit multiple de 3 ?

Exercice 06

On considère l'intervalle I = $]0 ; 10]$.

1°) On coupe l'intervalle I en 10 intervalles de même amplitude :
$]0 ; 1]$; $]1 ; 2]$; $]2 ; 3]$; $]3 ; 4]$; $]4 ; 5]$; $]5 ; 6]$; $]6 ; 7]$; $]7 ; 8]$; $]8 ; 9]$; $]9 ; 10]$
On considère l'univers $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 \}$ et la probabilité uniforme sur Ω.
On choisit de façon aléatoire un nombre X dans Ω.
Déterminer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

2°) On coupe l'intervalle I en 100 intervalles de même amplitude :
$]0 ; 0{,}1]$; $]0{,}1 ; 0{,}2]$; $]0{,}2 ; 0{,}3]$; ...... ; $]9{,}8 ; 9{,}9]$; $]9{,}9 ; 10]$
On considère l'univers $\Omega = \{ 0{,}1 ; 0{,}2 ; 0{,}3 ; \dots ; 9{,}8 ; 9{,}9 ; 10 \}$ et la probabilité uniforme sur Ω.
On choisit de façon aléatoire un nombre X dans Ω.
Déterminer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

3°) Même question que précédemment en coupant l'intervalle I en 1 000 intervalles de même amplitude, puis en 10 000 intervalles de même amplitude. (On ne demande pas de justification)

4°) Si on choisit de façon aléatoire un nombre X dans l'intervalle I, conjecturer la valeur de E(X).

5°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = \dfrac{1}{10}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{10} x\, f(x)\, dx$.

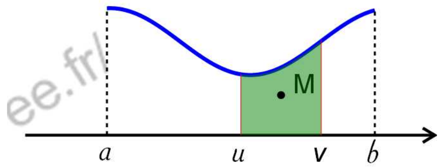
Définition

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un intervalle $[a ; b]$.

Soit f une fonction définie, positive et continue sur $[a ; b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 1$.

On dit que X suit une loi de fonction de densité f sur $[a ; b]$ lorsque pour tout $u \in [a ; b]$ et tout $v \in [a ; b]$ tels que $u \leqslant v$ on a $\quad p(u \leqslant X \leqslant v) = \displaystyle\int_u^v f(x)\, dx$

c'est-à-dire que $p(u \leqslant X \leqslant v)$ est égale à l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $\begin{cases} u \leqslant x \leqslant v \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$



On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel $E(X) = \displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx$

Remarques

- On a $p(X = u) = 0$ et $p(X = v) = 0$, donc $p([u ; v]) = p(]u ; v]) = p([u ; v[) = p(]u ; v[)$.
- Il est parfois utile que la fonction de densité soit définie sur $\mathbb{R}$.
  Dans ce cas, on prendra $f(x) = 0$ pour $x \notin [a ; b]$.

Exercice 07

X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ (avec $a < b$). Définir la fonction de densité f.
Calculer l'espérance mathématique de X.

Propriété

Si X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ alors son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Exercice 08

Une variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[1 ; 4]$.
On veut modéliser la situation en utilisant une loi (non uniforme) ayant pour densité la fonction f définie sur $[1 ; 4]$ par $f(x) = \lambda x$ où λ est un réel fixé.

1°) Justifier que ceci n'est possible qu'avec un seul réel λ que l'on déterminera.

2°) Déterminer les probabilité suivantes : $p(2 < X \leqslant 3)$; $p(X < 2)$; $p(X > 3{,}95)$.

3°) Calculer l'espérance mathématique de X.

Remarque

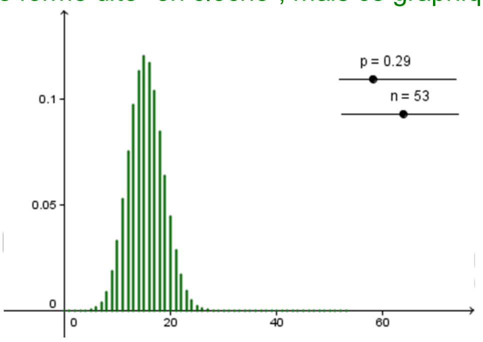
Si une variable aléatoire prend ses valeurs dans un intervalle non borné, par exemple $[0 ; +\infty[$, on ne peut pas utiliser une loi uniforme, mais on pourra néanmoins utiliser une loi à densité.

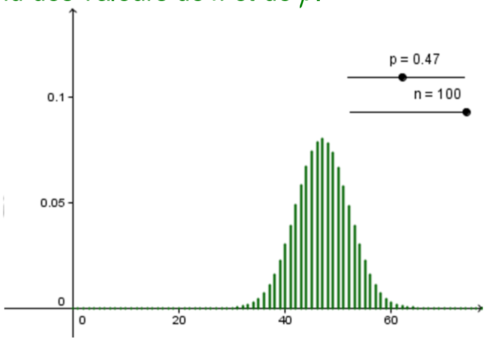
Remarque (voir animation)

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

On sait que son espérance mathématique est $E = n \times p$ et que son écart-type est $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$

Lorsqu'on fait une représentation graphique de la loi binomiale, on obtient pour toutes les valeurs de n et de p une forme dite "en cloche", mais ce graphique dépend des valeurs de n et de p.





Afin de standardiser la courbe en vue d'étendre les résultats à une infinité de valeurs en utilisant une fonction de densité, on peut commencer par centrer la variable (la courbe en cloche semble symétrique). Pour cela on considère la variable aléatoire : $Y_n = X_n - n \times p$.

D'après les propriétés connues, cette variable aléatoire Y_n aura alors une espérance mathématique égale à 0 et un écart-type identique à celui de la variable aléatoire X_n.

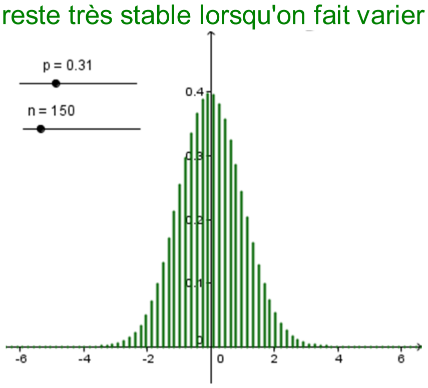
Puis afin de standardiser les écarts possibles de la variable aléaloire, on la divisera par l'écart-type σ.

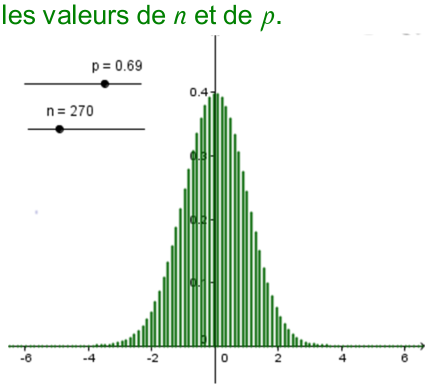
On obtient alors la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - n \times p}{\sqrt{n \times p \times (1 - p)}}$.

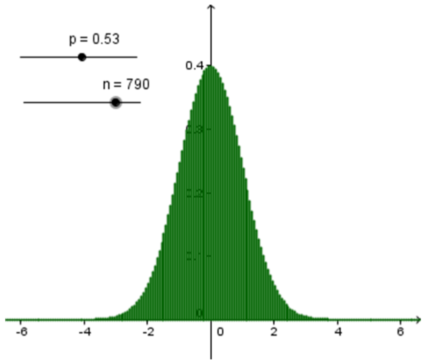
D'après les propriétés connues, la variable aléatoire Z_n aura alors une espérance mathématique égale à 0 et un écart-type égal à 1.

On dit que Z_n est la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n.

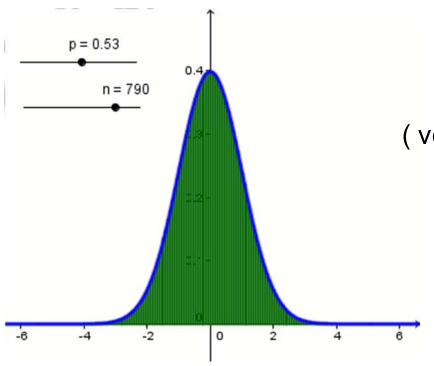
Lorsqu'on fait une représentation graphique de la loi de probabilité de Z_n on obtient une forme en cloche qui reste très stable lorsqu'on fait varier les valeurs de n et de p.







Lorsqu'on superpose à ce graphique la courbe de la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ on remarque, lorsque n est suffisamment grand, une coïncidence quasi-parfaite.



(voir animation)

Remarque

Les études sur ces probabilités sont principalement dues à :

Jacques BERNOULLI (1654-1705)

Abraham de MOIVRE (1667-1754)

Pierre-Simon LAPLACE (1749-1827)

Carl Friedrich GAUSS (1777-1855)

Exercice 09

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

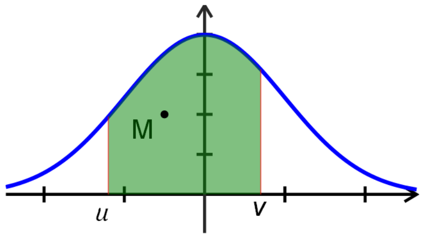
1°) Justifier que $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2°) Étudier le sens de variation de f. Justifier que f a un maximum que l'on déterminera.
En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.
3°) En utilisant GeoGebra, conjecturer la valeur de $\displaystyle\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque b est très grand.
(On ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ lorsque pour tout $u\in\mathbb{R}$ et tout $v\in\mathbb{R}$ tels que $u\leqslant v$,

on a $\quad \mathrm{p}(u\leqslant X\leqslant v)=\displaystyle\int_u^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$

c'est-à-dire que $\mathrm{p}(u\leqslant X\leqslant v)$ est égale à l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points M$(x\ ;\ y)$ du plan tels que $\begin{cases} u\leqslant x\leqslant v \\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$



La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$ est appelée fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Remarques

- On a $\mathrm{p}(X=u)=0$ et $\mathrm{p}(X=v)=0$, donc $\mathrm{p}([u\ ;\ v])=\mathrm{p}(]u\ ;\ v])=\mathrm{p}([u\ ;\ v[)=\mathrm{p}(]u\ ;\ v[)$.
- On ne peut pas, à partir des fonctions déjà connues, trouver de primitive de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, c'est-à-dire de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$
- La fonction de densité de la loi normale centrée réduite a une courbe symétrique par rapport à (Oy), donc si x est un nombre réel positif, on a $\displaystyle\int_{-x}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$
c'est-à-dire $\mathrm{p}(-x\leqslant X\leqslant 0)=\mathrm{p}(0\leqslant X\leqslant x)$ et par conséquent $\mathrm{p}(-x\leqslant X\leqslant x)=2\times\mathrm{p}(0\leqslant X\leqslant x)$
- Pour les mêmes raisons de symétrie on a aussi $\mathrm{p}(X\leqslant 0)=\mathrm{p}(X\geqslant 0)=\dfrac{1}{2}$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
Son espérance mathématique est $\mathrm{E}(X)=0$ et son écart-type est $\sigma(X)=1$.

Remarque

Lorsqu'on parle de la loi normale centrée réduite, le mot "centrée" indique que l'espérance mathématique est égale à 0, cela correspond au premier paramètre de la notation $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, le mot "réduite" indique que le carré de l'écart-type est égal à 1, cela correspond au deuxième paramètre de la notation $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Exercice 10

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. On donne dans le tableau suivant des valeurs approchées de $\mathrm{p}(X<x)$ pour certaines valeurs de x.

x	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	0,25	0,5	0,75	1
$\mathrm{p}(X<x)$	0,159	0,227	0,309	0,401	0,500	0,599	0,691	0,773	0,841

En utilisant ce tableau, déterminer : $\mathrm{p}(X\leqslant 0{,}5)$; $\mathrm{p}(X\geqslant -0{,}75)$; $\mathrm{p}(-1<X<0{,}5)$.

Exercice 11

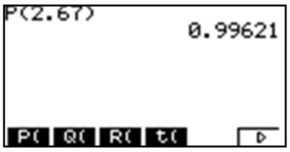
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. On donne $\mathrm{p}(X\leqslant -1{,}3)\approx 0{,}0968$.
Déterminer $\mathrm{p}(X\geqslant -1{,}3)$; $\mathrm{p}(X\geqslant 1{,}3)$; $\mathrm{p}(X\leqslant 1{,}3)$; $\mathrm{p}(-1{,}3\leqslant X\leqslant 0)$; $\mathrm{p}(-1{,}3\leqslant X\leqslant 1{,}3)$

Remarques

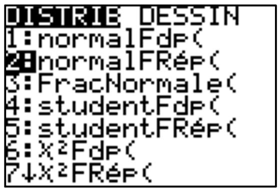
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

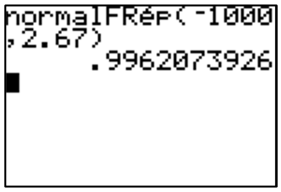
- La fonction qui à un réel x associe $F(x) = p(X < x)$ s'appelle fonction de répartition de la loi de probabilité.
- On peut déterminer une valeur approchée de $p(X < x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur.
  Par exemple pour trouver $p(X < 2{,}67) \approx 0{,}9962$

avec une calculatrice Casio, on pourra, dans le menu RUN, utiliser la touche OPTN puis PROB et l'expression
P(2.67)



avec une calculatrice TI, on pourra utiliser le menu distrib ou DISTR et l'expression normalFRép(-1000,2.67) ou normalcdf(-1000,2.67)

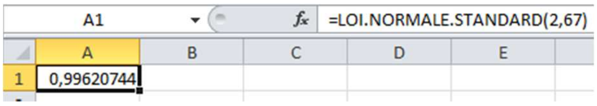




On peut remplacer la valeur -1000, par tout autre valeur négative assez importante. L'erreur commise est négligeable par rapport à l'imprécision du résultat donné par la calculatrice.

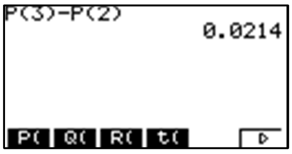
avec un tableur on pourra utiliser l'expression

=LOI.NORMALE.STANDARD(2,67)

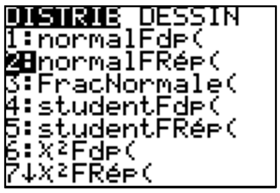


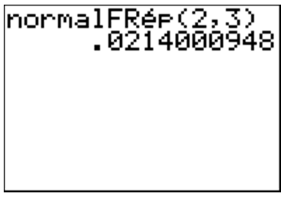
- De même on peut déterminer une valeur approchée de $p(a < X < b)$.
  Par exemple pour trouver $p(2 < X < 3) \approx 0{,}0214$

avec une calculatrice Casio, on pourra, dans le menu RUN, utiliserla touche OPTN puis PROB et l'expression
P(3)-P(2)

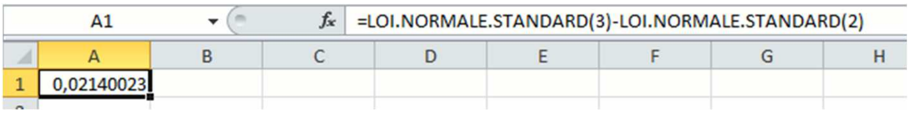


avec une calculatrice TI, on pourra utiliser le menu distrib ou DISTR et l'expression normalFRép(2,3) ou normalcdf(2,3)





avec un tableur on pourra utiliser l'expression
=LOI.NORMALE.STANDARD(3)-LOI.NORMALE.STANDARD(2)



Exercice 12

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

1°) Utiliser la calculatrice ou le tableur pour compléter le tableau suivant (valeurs approchées au millième) :

x	0	0,33	0,67	1	1,33	1,67	2	2,33	2,67
$p(X < x)$	0,500								0,996

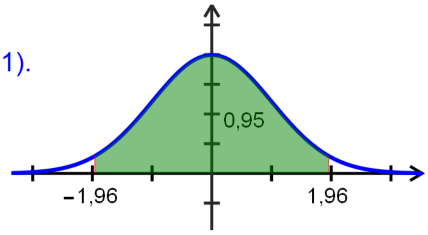
2°) En utilisant le tableau de la question précédente, déterminer :
$p(1 \leqslant X < 2)$; $p(0 \leqslant X \leqslant 0{,}67)$; $p(-0{,}33 \leqslant X \leqslant 0{,}33)$; $p(-1 \leqslant X \leqslant 2{,}67)$.

Exercice 13

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
Pour tout réel x on note $F(x) = p(X < x)$. (F s'appelle la fonction de répartition de la loi de probabilité).
Justifier que pour tous réels u et v tels que $u < v$, on a : $p(u \leqslant X < v) = F(v) - F(u)$.
Déterminer, en utilisant la calculatrice ou le tableur, les valeurs suivantes :
$p(1{,}21 \leqslant X < 2{,}35)$; $p(-2{,}54 < X < 1{,}45)$; $p(-1{,}96 < X < 1{,}96)$; $p(-2{,}58 < X < 2{,}58)$.

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.
On a $p(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
Statistiquement cela signifie qu'environ 95% des réalisations de X se trouvent dans l'intervalle $[-1,96 ; 1,96]$.



Remarque

Les résultats de l'exercice 13 confirment la propriété précédente et font aussi apparaître qu'environ 99% des réalisations de X se trouvent dans l'intervalle $[-2,58 ; 2,58]$.

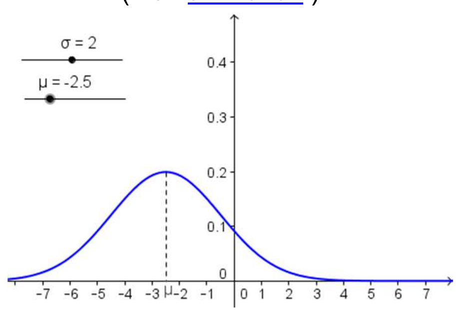
Définition

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans IR. Soit μ un réel et σ un réel positif.
On dit que X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ lorsque la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Remarques

(voir animation)

- Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, alors
  μ est l'espérance mathématique de X
  σ est l'écart-type de X.
- Graphiquement l'espérance mathématique μ correspond à l'axe de symétrie de la courbe de la fonction de densité et l'écart-type σ mesure la "concentration" de la loi de densité autour de son espérance mathématique.



Exercice 14

Pour une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$, on donne le tableau ci-dessous :

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$p(Z < x)$	0,500	0,599	0,691	0,773	0,841	0,894	0,933	0,960	0,977	0,988	0,994	0,997	0,999

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1 ; 4)$.
Justifier, en utilisant le tableau précédent, que $p(2 < X < 5) \approx 0,286$.
Déterminer $p(3,5 < X < 6,5)$.

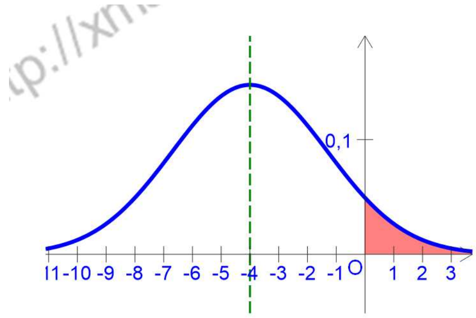
Exercice 15

1°) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Vérifier en utilisant une calculatrice ou un tableur que $p(0 < Z < 1) \approx 0,341$.
Déterminer en utilisant une calculatrice ou un tableur les valeurs de $p(-2 < Z < 4)$ et $p(-1 < Z < 2)$.

2°) Une entreprise fabrique des vis. On considère la variable aléatoire L correspondant à la longueur d'une vis en millimètres. On admet que L suit la loi normale $\mathcal{N}(150 ; 0,25)$.
a) Justifier que la probabilité que la longueur d'une vis soit comprise entre 149 et 152 millimètres est égale à $p(-2 < Z < 4)$. Donner la valeur de cette probabilité.
b) Lorsqu'une vis a une longueur comprise entre 149,5 et 151 millimètres elle est acceptée.
Lorsqu'une vis a une longueur comprise entre 151 et 153 millimètres elle est rectifiée.
Dans tous les autres cas, la vis est rejetée.
Déterminer la probabilité qu'une vis soit acceptée, qu'elle soit rectifiée, qu'elle soit rejetée.
(On donnera les résultats au millième près)

Exercice 16

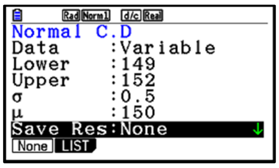
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ dont la fonction de densité est représentée ci-contre.
L'aire A coloriée sur le dessin est telle que :
$A \approx 0,07$ unités d'aire.
Déterminer approximativement μ et σ .

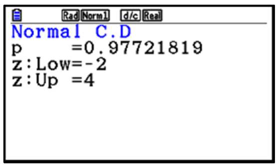


Remarques

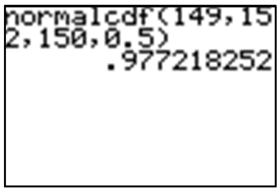
Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, on peut déterminer $p(a < X < b)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur.
Par exemple si X suit la loi normale $\mathcal{N}(150\ ;\ 0{,}25)$, c'est-à-dire pour $\mu = 150$ et $\sigma = 0{,}5$
pour trouver $p(149 < X < 152) \approx 0{,}9772$

avec une calculatrice Casio, on pourra, dans le menu STAT, utiliser les touches DIST NORM Ncd (éventuellement Var)
Lower : 149 Upper : 152
σ : 0.5 μ : 150

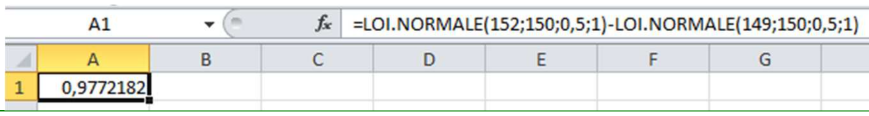




avec une calculatrice TI, on pourra utiliser le menu distrib ou DISTR et l'expression
normalFRép(149,152,150,0.5)
ou normalcdf(149,152,150,0.5)



avec un tableur on pourra utiliser l'expression
=LOI.NORMALE(152;150;0,5;1) - LOI.NORMALE(149;150;0,5;1)



Remarques

- On peut utiliser la même méthode pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ en prenant $\mu = 0$ et $\sigma = 1$
- Pour trouver $p(X > a)$ on pourra utiliser la méthode précédente et déterminer $p(a < X < b)$ en prenant pour b une valeur très grande ; on peut aussi raisonner en utilisant la valeur de μ car on sait que $p(X > \mu) = 0{,}5$
  Par exemple si X suit la loi normale $\mathcal{N}(500\ ;\ 81)$, c'est-à-dire pour $\mu = 500$ et $\sigma = 9$
  pour trouver $p(X > 520)$ on peut
  déterminer $p(520 < X < 100\,000)$; on trouve 0,0131341
  déterminer $0{,}5 - p(500 < X < 520)$; on trouve $0{,}5 - 0{,}4868659$ ce qui donne 0,0131341
  pour trouver $p(X > 495)$ on peut
  déterminer $p(495 < X < 100\,000)$; on trouve 0,7107426
  déterminer $0{,}5 + p(495 < X < 500)$; on trouve $0{,}5 + 0{,}2107426$ ce qui donne 0,7107426
- On peut utiliser des méthodes similaires pour déterminer $p(X < b)$

Exercice 17

En utilisant une calculatrice ou un tableur, déterminer dans chacun des cas une valeur approchée de la probabilité demandée en sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.

1°) $p(-3 < X < 0)$ avec $\mu = 1$ et $\sigma = 4$
2°) $p(-4{,}8 < X < -3{,}5)$ avec $\mu = -4$ et $\sigma = 0{,}3$
3°) $p(X < 49)$ avec $\mu = 40$ et $\sigma = 12$
4°) $p(X > 0)$ avec $\mu = -1$ et $\sigma = 3$
5°) $p(X < 18)$ avec $\mu = 20$ et $\sigma = 5$
6°) $p(X > -5)$ avec $\mu = -3$ et $\sigma = 2$

Exercice 18

Une entreprise fabrique des conserves alimentaires dont l'étiquette annonce une masse de 250 grammes.
On admet que la variable aléatoire M qui à chaque conserve associe sa masse suit la loi normale de moyenne $\mu = 249$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1°) En utilisant la calculatrice, donner à 10^{-3} près, la probabilité qu'une boîte de conserve ait une masse comprise entre 240 et 250 grammes.
2°) En utilisant la calculatrice, déterminer les valeurs approchées à 10^{-3} près de :
$p(\mu - \sigma < M < \mu + \sigma)$; $p(\mu - 2\sigma < M < \mu + 2\sigma)$; $p(\mu - 3\sigma < M < \mu + 3\sigma)$.
Interpréter ces résultats en termes statistiques avec des pourcentages.

Exercice 19

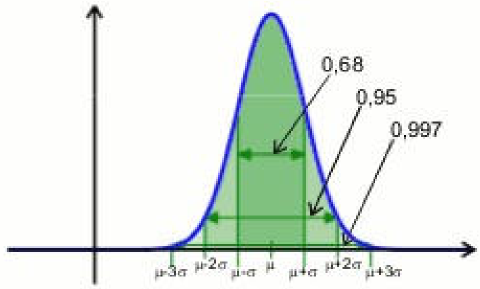
X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.

1°) Sachant que $\mu = 1$ et $\sigma = 4$, déterminer, à 10^{-3} près, les probabilités suivantes :
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$; $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$; $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$
2°) Justifier que les valeurs calculées dans la question précédente ne dépendent pas de μ et de σ.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.
On a :

- $p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68$ à 10^{-2} près.
- $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ à 10^{-2} près.
- $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$ à 10^{-3} près.



Exercice 20

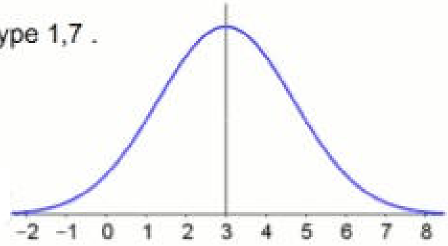
Le quotient intellectuel QI est le résultat d'un test suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.
Différents tests sont utilisés. Leur moyenne μ est toujours 100.
L'écart-type σ est de 15 pour le test dit "standard" et de 24 pour le test de Cattell.
L'intervalle $[\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma]$ est appelé plage de normalité à 68% et l'intervalle $[\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]$ est appelé plage de normalité à 95% .

1°) Une personne a un résultat de 135 mais ne connaît pas la nature du test utilisé. Indiquer, suivant le test, si ce résultat est dans la plage de normalité à 68%, dans la plage de normalité à 95%.
2°) En utilisant une calculatrice, déterminer la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un QI supérieur à 140, pour un test standard et pour un test de Cattell.
3°) Justifier qu'un résultat X pour un test de Cattell correspond à $0{,}625X + 37{,}5$ pour un test standard.

Exercice 21

Une variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 1,7 .
La courbe ci-contre représente la densité de probabilité de Y.

1°) Indiquer par lecture graphique la valeur de μ.
2°) Déterminer, à l'aide de la calculatrice la probabilité $p(2{,}5 \leqslant Y \leqslant 4)$ (On donnera le résultat à 0,001 près)
3°) En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur de h pour que $p(3 - h \leqslant Y \leqslant 3 + h) \approx 0{,}95$



Rappels Intervalles de fluctuation au seuil de 95%

- En classe de 2nde il a été vu que, pour un caractère ayant une proportion p dans une population donnée, lorsqu'on prend des échantillons de taille n dans cette population, si $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$ et si $n \geqslant 25$ alors pour 95% au moins des échantillons la fréquence du caractère appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
- En classe de 1ère, pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, on a considéré a le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > 2{,}5\%$ et b le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 97{,}5\%$.
  Alors la fréquence du succès est dans l'intervalle $\left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Définition - Propriété

Un caractère ayant une proportion p dans une population donnée, on prend un échantillon de taille n dans cette population. Soit X_n l'effectif du caractère dans cet échantillon et $F_n = \frac{X_n}{n}$ sa fréquence.
On appelle intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire fréquence F_n l'intervalle $I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Remarques

- On peut justifier que $1{,}96\sqrt{p(1-p)} < 1$ ce qui montre que cet intervalle est plus précis que l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donné en classe de 2nde.
- On considèrera que l'on peut utiliser cet intervalle lorsque les conditions suivantes sont remplies :
  $n \geqslant 30$; $n \times p \geqslant 5$ et $n \times (1 - p) \geqslant 5$.

Exercice 22

D'après l'Insee la proportion de femmes dans la population française est d'environ 51,6 %.
Un observateur se place à la sortie d'une gare et note le nombre Y_n de femmes observées parmi les n premières personnes qui passent. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence F_n correspondant à Y_n lorsque $n = 50$ puis lorsque $n = 100$.
Sur les 100 premières personnes sortant de la gare, 43 sont des femmes. Ce résultat est-il conforme à l'intervalle trouvé ?
La même expérience effectuée sur 100 personnes à la sortie des employés d'une entreprise donne 60 femmes. Peut-on en conclure que l'entreprise emploie plus particulièrement des femmes ?

Exercice 23

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,17.

1°) Justifier, en utilisant une calculatrice, que l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de panne au seuil de 95% pour un échantillon de 40 téléviseurs est : $[0{,}054 ; 0{,}286]$.
2°) Une association de consommateurs effectue un test sur 40 personnes ayant ce modèle de téléviseur. Dans cet échantillon, 11 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat. Doit-on rejeter l'affirmation du constructeur ?
3°) L'association pense maintenant effectuer un test sur 200 téléviseurs. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 200 téléviseurs. Interpréter le résultat en fonction du nombre N de pannes décelées sur les 200 téléviseurs.

Exercice 24

Une mutuelle déclare que 22% de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013.
Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle.
Parmi celles-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013.
Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle ? Justifier la réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation.

Remarque

L'utilisation de l'intervalle de fluctuation permet de vérifier, par un échantillon, qu'une proportion est conforme à un résultat annoncé ou supposé.
Lorsqu'on veut, inversement, déterminer à partir d'un échantillon, la proportion dans la population générale, on utilisera la notion d'intervalle de confiance.

Propriété

Un caractère ayant une proportion p dans une population donnée, on prend un échantillon de taille n dans cette population. Soit X_n l'effectif du caractère dans cet échantillon et $F_n = \frac{X_n}{n}$ sa fréquence.

Lorsque n est suffisamment grand, p est dans l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Définition

Un caractère ayant une proportion p dans une population donnée, si f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n (avec n assez grand), alors on dit que la proportion p (dans la population générale) se trouve dans l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance supérieur à 95%.

On dit que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance à 95% de la proportion p.

Remarque

On pourra utiliser cet intervalle de confiance lorsque les conditions suivantes sont remplies :
$n \geqslant 30$; $n \times p \geqslant 5$ et $n \times (1 - p) \geqslant 5$.

Exercice 25

Dans un échantillon de 500 donneurs de sang âgés de 18 à 25 ans, 267 sont des filles.
Donner au seuil de 95%, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les donneurs de sang âgés de 18 à 25 ans. (Les bornes de cet intervalle seront données à 0,01 près)
Une personne affirme qu'il y a davantage de garçons que de filles parmi les donneurs de sang âgés de 18 à 25 ans. Que pensez-vous de cette affirmation ?

Exercice 26

On effectue un sondage pour déterminer le pourcentage de personnes décidées à voter pour un candidat A.

1°) Sur un échantillon de 50 personnes choisies au hasard, 22 ont déclaré vouloir voter pour A.
Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion p de personnes décidées à voter pour A.
Ce résultat est-il utilisable dans la pratique ?

2°) Sur un échantillon de 500 personnes choisies au hasard, 215 ont déclaré vouloir voter pour A.
Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion p de personnes décidées à voter pour A.

3°) On voudrait obtenir un intervalle de confiance à 95% d'amplitude 2%. Combien de personnes choisies au hasard faudrait-il interroger ?

Remarque

L'intervalle $\left[f - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \,;\, f + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$ est parfois utilisé comme intervalle de confiance à 95 % mais il n'est pas possible de le justifier au niveau d'une Terminale.

Exercice 27

On interroge un échantillon de 1 000 personnes choisies de façon aléatoire.
Sur ces 1 000 personnes, 490 personnes sont des femmes et 312 personnes ont moins de 25 ans.

1°) D'après l'Insee, la proportion de femmes dans la population générale est d'environ 51,6 %.
En utilisant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, déterminer si l'échantillon est conforme à la répartition hommes-femmes dans la population générale.

2°) D'après l'Insee, la proportion des moins de 25 ans dans la population générale est d'environ 30,8 %.
En utilisant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, déterminer si l'échantillon est conforme à la répartition des moins de 25 ans dans la population générale.

3°) On interroge les personnes de l'échantillon concernant l'intérêt qu'ils portent à une émission de télévision.
258 des 1 000 personnes sont intéressées.
Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p de personnes intéressées par l'émission de télévision dans la population générale.

Exercice 28

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix et les autres sont haut de gamme.
Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

1°) a) Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n'y a pas plus de 3% de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock. À cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas haut de gamme et en trouve 19 qui sont défectueux. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux ? On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

b) Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas premier prix, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux. Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95%.

2°) D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas premier prix vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

a) Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

b) Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas premier prix qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05 (On ne réalimente pas le stock en cours de mois). Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.