Devoir Surveillé n°1

Terminale ES/L

Suites

Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice <u>est autorisé</u>.

Exercice 1. QCM d'après Bac — 4 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Question 1 (Réponse d)

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\frac{1}{2}$.
La somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ est égale à :

a. $2 \times \left(1 - 0,5^{10}\right)$

b. $2 \times \left(1 - 0,5^{11}\right)$

c. $800 \times \left(1 - 0,5^{10}\right)$

$\boxed{\textbf{d. } 800 \times \left(1 - 0.5^{11}\right)}$

Preuve

La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\frac{1}{2}$, alors la somme de ses 11 premiers termes est donnée par :

$$\begin{aligned}
S &= 1\text{er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q} \\
&= u_0 \times \frac{1 - 0,5^{11}}{1 - 0,5} \\
&= 400 \times \frac{1 - 0,5^{11}}{0,5} \\
S &= \underline{800 \times \left(1 - 0.5^{11}\right)}
\end{aligned}$$

Question 2 (Réponse c)

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à U la valeur 50
	Tant que $U < 120$ faire
	U prend la valeur $1,2 \times U$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

En fin d'exécution, cet algorithme affiche la valeur :

a. 4 **b.** 124,416 $\boxed{\textbf{c. } 5}$ **d.** 96

Preuve

Le test de la boucle est $U < 120$ donc l'algorithme s'arrête dès que $U \geq 120$ et affiche la valeur de n correspondante. Il suffit donc de calculer les premiers termes :

$$\begin{cases} U_4 = 103.68 \\ U_5 = 124.416 \end{cases} \implies \underline{n = 5}$$

Question 3 (Réponse a)

La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{30}$ est égale à :

$\boxed{\textbf{a. } -1 + 2^{31}}$ **b.** $1 - 2^{31}$ **c.** $-1 + 2^{30}$ **d.** $1 - 2^{30}$

Preuve

On reconnait la somme des 31 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2 :

$$\begin{aligned} S &= 1\text{er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q} \\ &= 1 \times \frac{1 - 2^{31}}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - 2^{31}}{-1} \\ S &= \underline{-1 + 2^{31}} \end{aligned}$$

Question 4 (Réponse b)

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_2 = 100$ et de raison $q = 2$ est de terme général :

a. 100×2^n $\boxed{\textbf{b. } 25 \times 2^n}$ **c.** $100 \times 2^{n-1}$ **d.** $2 \times 2^{n-2}$

Preuve

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_2 = 100$ et de raison $q = 2$ est de terme général, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_p \times q^{n-p} \\ u_n &= u_2 \times q^{n-2} \\ u_n &= 200 \times 2^{n-2} \\ u_n &= 200 \times 2^n \times 2^{-2} \\ u_n &= \underbrace{200 \times 2^{-2}}_{25} \times 2^n \\ u_n &= \underline{25 \times 2^n} \end{aligned}$$

Exercice 2. D'après BAC 16 points

1. Calculer u_1 et u_2.

- u_1 est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), 1 jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
  On le calcule en effectuant une baisse de 4% du volume $u_0 = 75$ m^3 initial (à cause de l'évaporation) et en ajoutant 2 m^3. Effectuer une baisse de 4% c'est multiplier par $(1-4\%) = 0,96$ donc $u_1 = 0,96 \times 75 + 2 = \underline{74 \text{ m}^3}$.
- u_2 est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), 2 jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
  On le calcule en effectuant une baisse de 4% du volume $u_1 = 74$ m^3 précédent (à cause de l'évaporation) et en ajoutant 2 m^3, donc $u_2 = 0,96 \times u_2 + 2 = \underline{73.04 \text{ m}^3}$.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique. Est-elle géométrique ?

- On : $\begin{cases} u_1 - u_0 = -1 \\ u_2 - u_1 = -0,96 \neq -1 \end{cases}$ donc la suite n'est pas arithmétique .
- On : $\begin{cases} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{74}{75} \approx 0,98667 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{73.04}{74} \approx 0,98703 \end{cases}$ donc les rapports sont différents, la suite n'est pas géométrique .

3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2$.

Pour tout entier n, u_{n+1} est le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), $(n+1)$ jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
On le calcule en effectuant une baisse de 4% du volume u_n précédent (à cause de l'évaporation) et en ajoutant 2 m^3.
Effectuer une baisse de 4% c'est multiplier par $(1-4\%) = 0,96$ donc $\underline{u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2}$.

4. *Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$.*

4. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 75 \\ u_{n+1} & = 0,96 \times u_n + 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 50 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ v_{n+1} &= (0,96\ u_n + 2) - 50 \\ v_{n+1} &= 0,96 \times u_n - 48 \\ v_{n+1} &= 0,96 \times \left(u_n + \frac{-48}{0,96}\right) \\ v_{n+1} &= 0,96 \times (u_n - 50) \\ v_{n+1} &= 0,96 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,96$, et de premier terme $v_0 = 25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 50 \\ v_0 &= 75 - 50 \\ v_0 &= 25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 25 \\ v_{n+1} & = 0,96 \times v_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,96$, et de premier terme $v_0 = 25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = 25 \times (0,96)^n}$$

4. c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0,96^n + 50$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 50$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 50$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = 25 \times (0,96)^n + 50}$$

4. d. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,96 < 1$ et d'après le théorème 1 on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,98)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 25 \times (0,98)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} 25 \times (0,98)^n + 50 = 50$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 50}$$

Sur le long terme la piscine contiendra 50 m^3 d'eau.

5. *Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à 65 m^3, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :*

Variables :	n est un nombre entier naturel	L1
	u est un nombre réel	L2
Traitement :	n prend la valeur 0	L3
	u prend la valeur 75	L4
	Tant que u $\boxed{u \geq 65}$	L5
	u prend la valeur $\boxed{0.96 \times u + 2}$	L6
	n prend la valeur $n+1$	L7
	Fin Tant que	L8
Sortie :	Afficher n	L9

5. a. Recopier et compléter les lignes L5 et L6 de cet algorithme.

5. b. Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?

n	0	1	2	3	...	7	8	9	10	11	12	**13**	14
u_n	75	74	73.040	72.118	...	68.786	68.035	67.313	66.621	65.956	65.318	64.705 < 65	64.117

Le résultat affiché en sortie de cet algorithme est donc $n = 13$.

5. c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

Le niveau d'eau est suffisant si on conserve ce réglage pendant 13 jours. En effet le premier jour, la piscine contient $u_0 = 75$ m^2, et après 13 jours le niveau passe sous les 65 m^3, d'après le résultat précédent.
Donc après 12 jours soit pendant 13 jours le niveau d'eau est acceptable puisque tous les termes u_0, u_1,... , u_{12} sont supérieurs à 65.

n	0	1	2	3	...	12	**13**	14
u_n	75	74	73.040	72.118	...	65.318	64.705 < 65	64.117
	1er jour	après 1 jour	après 2 jours	après 3 jours	...	après 12 jours	après 13 jours	
Nombre de jours	1	2	3	4		13	14	

Fin du devoir