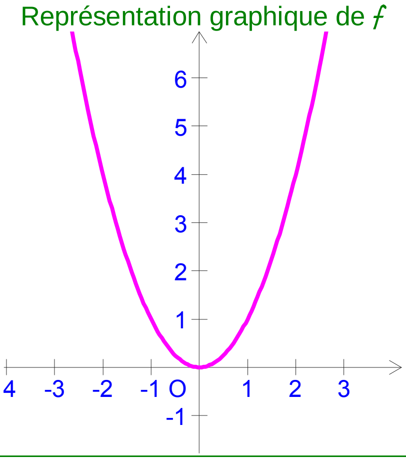
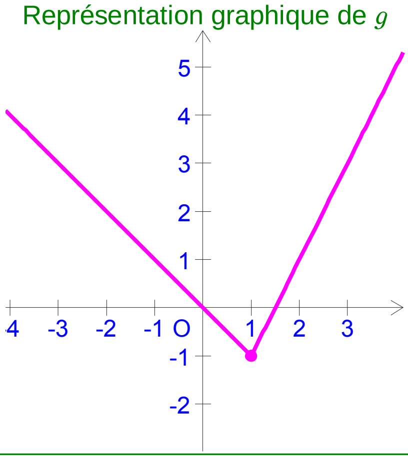
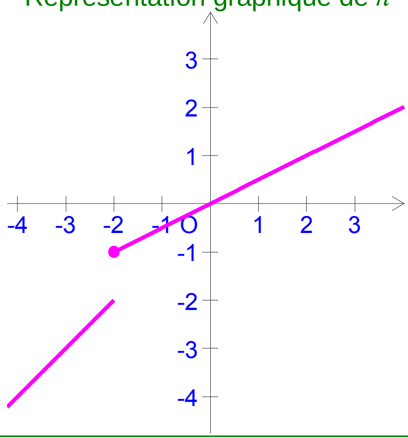
CONTINUITÉ

Notion de continuité

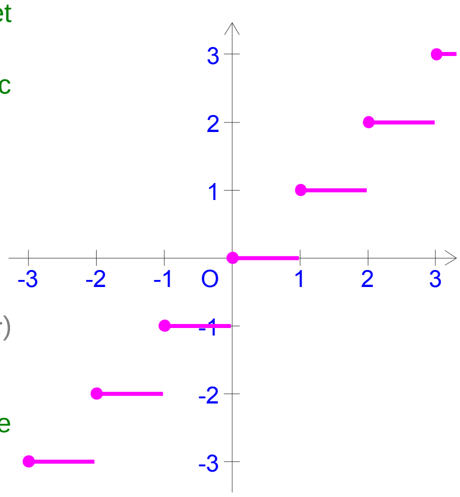
On peut définir mathématiquement la notion de continuité d'une fonction mais cette définition relativement compliquée n'est pas au programme.
Graphiquement, on peut reconnaître une fonction continue sur un intervalle I par le fait que le tracé de la courbe représentative de f pour x appartenant à I peut se faire sans lever le crayon de la feuille.

Exemple 1

$f(x) = x^2$	$g(x) = -x$ si $x \leqslant 1$ et $g(x) = 2x - 3$ si $x > 1$	$h(x) = x$ si $x < -2$ et $h(x) = \frac{1}{2}x$ si $x \geqslant -2$
Représentation graphique de f 	Représentation graphique de g 	Représentation graphique de h 
f est continue sur IR	g est continue sur IR	h est continue sur $]-\infty ; -2[$ h est continue sur $[-2 ; +\infty[$ mais h n'est pas continue en -2 On dit que h est continue par intervalles mais h n'est pas continue sur IR

Exemple 2

Considérons la fonction $x \mapsto E(x)$ appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Ainsi $E(2{,}5)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à 2,5 donc $E(2{,}5) = 2$
De même $E(-2{,}4) = -3$; $E(1{,}9999) = 1$ et $E(2) = 2$
Si n est un nombre entier, alors $E(n) = n$
et pour tout $x \in [n ; n + 1[$, on a $E(x) = n$
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



La fonction "Partie entière" n'est pas continue en n $(n \in \mathbb{Z})$.
En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, $E(x)$ n'est pas très proche de $E(n)$.
On a vu par exemple que $E(1{,}9999) = 1$ et $E(2) = 2$
Elle est continue sur chaque intervalle $[n ; n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$, on dit que c'est une fonction continue par intervalle.
"Partie entière" est une fonction dite "en escalier".
La courbe fait "un saut" pour chaque valeur entière de x .

Avec une calculatrice TI, $E(x)$ est en général noté partEnt(x) (menu MATH NUM).
Avec une calculatrice Casio, $E(x)$ est en général noté Intg(x) (menu OPTN NUM).
Le tracé doit être fait en mode point (dot, non relié ou plot), sinon apparaîtront des lignes verticales qui ne font pas partie de la représentation graphique.

Remarque

On admet que les fonctions qui seront étudiées en Terminale sont des fonctions continues par intervalle.

Exercice 01

Représenter graphiquement la fonction dans chacun des cas suivants.
À partir du graphique, étudier la continuité de cette fonction.

1°) $f(x) = -2x - 5$ si $x < 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ si $x \geqslant 0$

2°) $g(x) = x^2$ si $x \leqslant 1$ et $g(x) = x$ si $x > 1$

3°) $h(x) = 2$ si $x \in \left]-\infty\,;-2\right]$; $h(x) = -x$ si $x \in \left]-2\,;2\right[$ et $h(x) = -1$ si $x \in \left[2\,;+\infty\right[$

Exercice 02

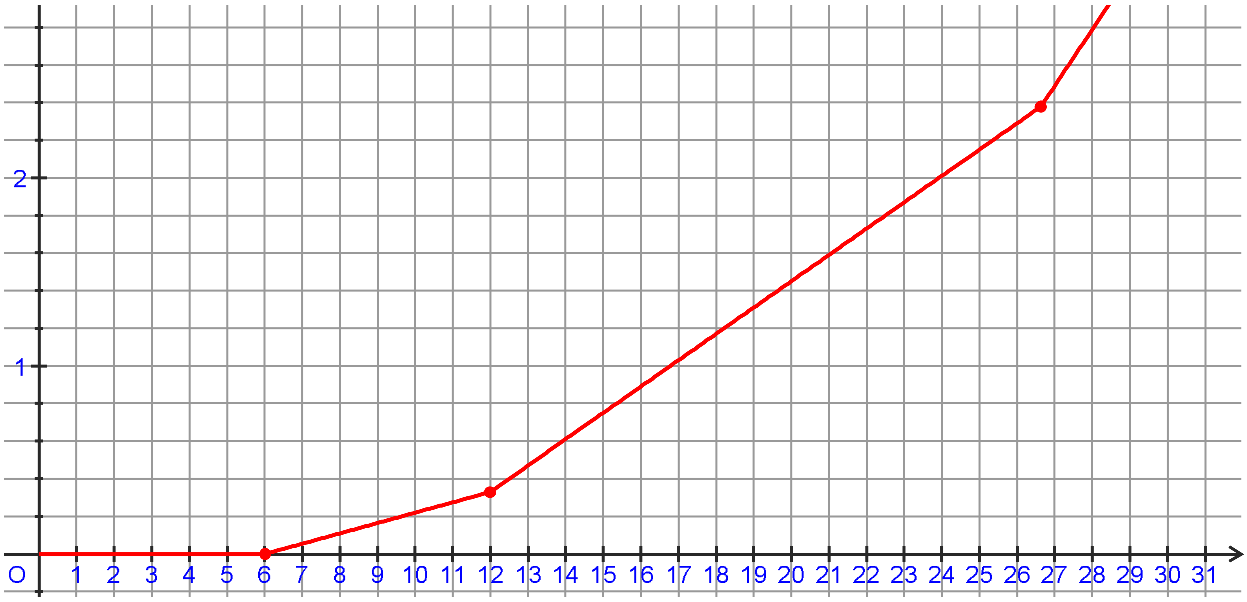
Le calcul de l'impôt sur le revenu $\mathrm{I}(x)$ pour un célibataire se fait, en fonction de son revenu annuel imposable x, de la façon suivante :

Si $x \leqslant 6\,011$	$\mathrm{I}(x) = 0$
Si $6\,011 < x \leqslant 11\,991$	$\mathrm{I}(x) = 0{,}055x - 330{,}61$
Si $11\,991 < x \leqslant 26\,631$	$\mathrm{I}(x) = 0{,}14x - 1\,349{,}84$
Si $26\,631 < x \leqslant 71\,397$	$\mathrm{I}(x) = 0{,}30x - 5\,610{,}80$
Si $71\,397 < x \leqslant 151\,200$	$\mathrm{I}(x) = 0{,}41x - 13\,464{,}47$
Si $x > 151\,200$	$\mathrm{I}(x) = 0{,}45x - 19\,512{,}47$

(x et $\mathrm{I}(x)$ sont exprimés en euros)

1°) Un célibataire a un revenu annuel imposable de 5 000 €. Calculer le montant de son impôt sur le revenu.
Même question pour un revenu annuel imposable de 10 000 €, de 20 000 €.

2°) On a représenté graphiquement ci-dessous l'impôt sur le revenu en fonction du revenu imposable.
La graduation est faite en milliers d'euros (k€)
Placer sur ce graphique les trois points correspondants aux trois situations de la question précédente.



Au vu de ce graphique, peut-on dire que la fonction "Impôt sur le revenu" est une fonction continue ?

3°) Un célibataire a un revenu annuel imposable de 20 000 €.
Il lit dans une documentation que son impôt peut se décomposer de la façon suivante :
Rien pour la part de revenu dans la "tranche" de 0 à 6 011 € ; 5,5% pour la part de revenu dans la "tranche" de 6 011 à 11 991 € et 14% pour la part de revenu dans la "tranche" de 11 991 à 26 631 €.
Justifier que cette décomposition donne le même résultat que celui trouvé à la première question.

4°) Une personne célibataire dont le revenu est de 11 900 € tient le raisonnement suivant :
Heureusement que je n'ai pas fait d'heures supplémentaires, car alors j'aurais changé de « tranche », mon impôt aurait été beaucoup plus élevé et finalement j'aurais perdu de l'argent dans l'opération.
Qu'en pensez-vous ?

Propriété (admise)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Convention

Dans un tableau de variations de fonction, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

Exemple

Le tableau de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) signifie que la fonction carré est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et qu'elle est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in$ I et $b \in$ I.

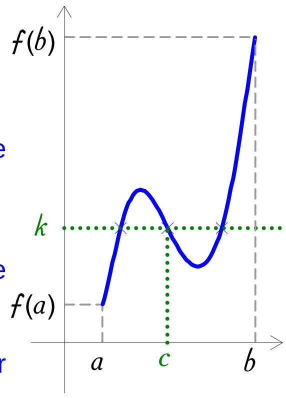
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

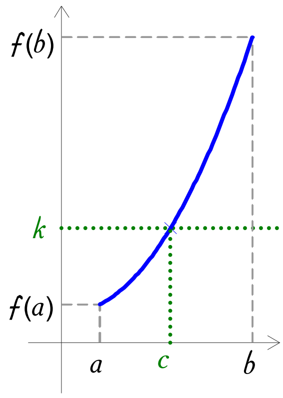
Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

Si de plus la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle I, alors le réel c est unique.



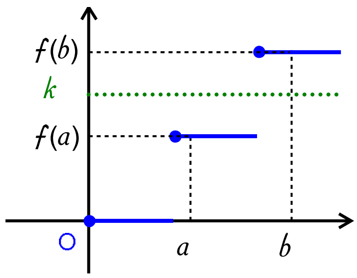
f n'est pas strictement monotone



f est strictement monotone

Remarque

La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème des valeurs intermédiaires.
Si la fonction f n'est pas continue, il est possible que pour un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il n'existe aucun réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

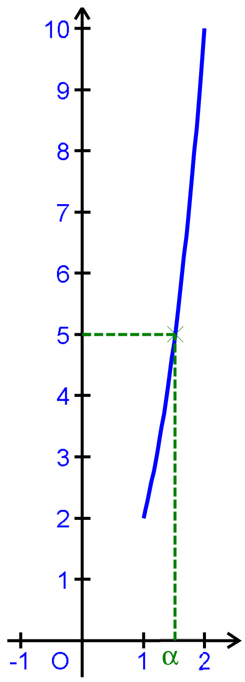


Exemple solution approchée d'une équation

La fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $[1\,;2]$. Son tableau de variation sur cet intervalle est :

x	1	2
f	2 ↗	10

Sa représentation graphique est donnée ci-contre.
Pour tout $k \in [2\,;10]$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[1\,;2]$.
En particulier **l'équation $f(x) = 5$ a une solution unique α dans $[1\,;2]$**.



On peut trouver une valeur approchée de α en faisant un tableau de valeurs de f.
(Méthode dite "par balayage")
Avec une calculatrice on obtient :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	2	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696	6,613	7,632	8,759	10

On a $f(1{,}5) < 5 < f(1{,}6)$
f étant strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$ on en déduit que la solution α de l'équation $f(x) = 5$ est telle que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$
On pourrait, en faisant un tableau de valeurs avec un pas de 0,01, justifier que $1{,}51 < \alpha < 1{,}52$

Remarque

Le théorème des valeurs intermédaires permet de démontrer l'existence de solution(s) d'une équation, mais il ne permet pas d'en déterminer la(les) valeur(s).
On pourra obtenir des valeurs approchées de solutions en utilisant la calculatrice.

Exercice 03

On donne ci-contre le tableau de variations de f.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
(On justifiera le résultat)

x	-5		2		4
f	7	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Exercice 04

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f.

x	-5		-1		0		10
f	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

Donner, sans justification, dans chaque cas, le nombre de solutions dans $[-5;10]$ de l'équation $f(x) = k$.
a) avec $k = -5$
b) avec $k = -1$
c) avec $k = 7$
d) avec $k = 3$

Exercice 05

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ pour $x \in [0 ; 5]$.
Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
Donner le tableau de variations de f.
En déduire que l'équation $f(x) = 8$ a une solution unique α dans $[0 ; 5]$.
En complétant le tableau de valeurs ci-dessous, donner une valeur approchée à 0,1 près par défaut de α.

x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
$f(x)$											

Trouver la valeur exacte de α.

Exercice 06

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$
1°) Développer l'expression $(x - 1)^2(x - 3)$.
2°) Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
3°) Donner, en le justifiant, le tableau de variations de f sur $[0 ; 3]$.
4°) En utilisant le tableau de la question précédente, donner, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$. (Aucune justification n'est attendue)

Exercice 07

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
- si $x \leqslant 0$ $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
- si $0 < x < 2$ $f(x) = ax + b$; a et b étant deux nombres réels.
- si $x \geqslant 2$ $f(x) = x^2 - 6x + 4$

Déterminer a et b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 08

Soit g la fonction définie sur $[-4 ; 3]$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
1°) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Donner le tableau de variations de g.
Représenter graphiquement la fonction g.
2°) Justifier que l'équation $2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 = 0$ a, dans l'intervalle $[-4 ; 3]$ une solution unique et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.