Chapitre 1

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES

I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q u_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $$C_{n+1} = C_n \times \left(1+\frac{1}{100}\right) = 1{,}01 \times C_n$$
   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1{,}01$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2012+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = r_n \times \left(1-\frac{4}{100}\right) = 0{,}96 \times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0{,}96^{10} \approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 PROPRIÉTÉ 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

4 MONOTONIE

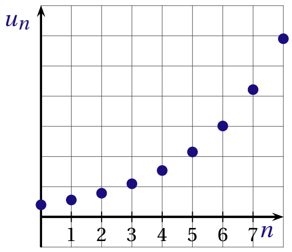
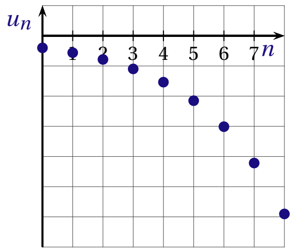
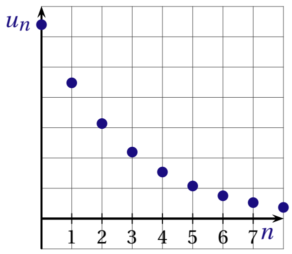
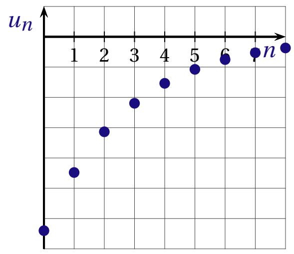
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite $\left(q^n\right)$ n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

— Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite $\left(q^n\right)$.

— Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite $\left(q^n\right)$.

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 LIMITE INFINIE

DÉFINITION

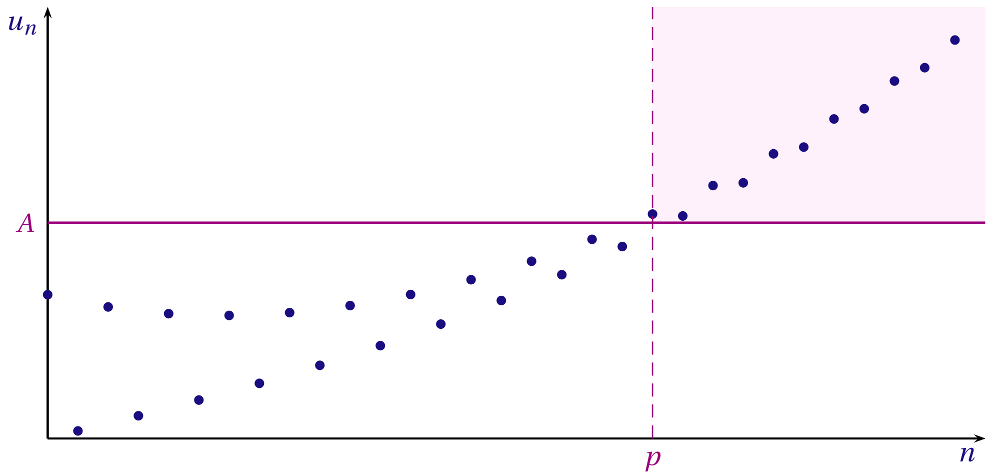
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Soit p un entier tel que pour tout entier $n \geqslant p$, on a $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$.

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

2 LIMITE FINIE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. On écrit :

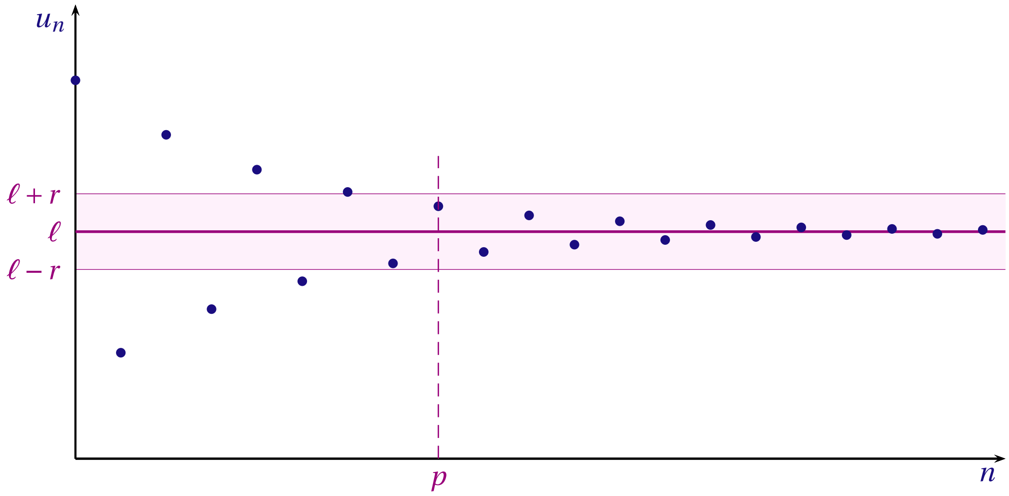
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME (*admis*)

Soit q un nombre réel :

— Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

— Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

— Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

REMARQUE

Pour $q = 1$, la suite $\left(q^n\right)$ est constante et égale à 1 donc convergente.
Pour $q = -1$, la suite $\left(q^n\right)$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n, elle n'admet pas de limite.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q **strictement positive**.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

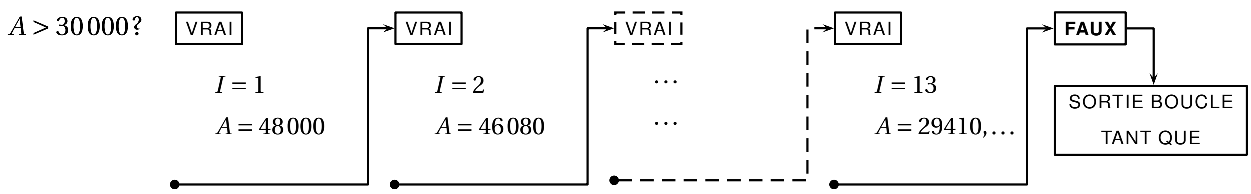
EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $r_0 = 50\,000$
Comme $0 < 0{,}96 < 1$ la suite (r_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} 50\,000 \times 0{,}96^n = 0$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier I tel que pour tout entier $n \geqslant I$, $50\,000 \times 0{,}96^n < 30\,000$

```
A ← 50000
I ← 0
Tant que A ⩾ 30000
    I ← I + 1
    A ← 0,96 × A
Fin Tant que
```

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 50000 → A	50000 → A ↲
: 0 → I	0 → I ↲
: While A ≥ 30000	While A ≥ 30000 ↲
: I + 1 → I	I + 1 → I ↲
: 0.96*A → A	0.96*A → A ↲
: End	WhileEnd ↲
: Disp I	I

Initialisation des variables A et I : $A = 50\,000$ et $I = 0$.
Traitement : Tant que la condition $A \geqslant 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "**TANT QUE**" et "**FIN TANT QUE**"



Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geqslant 13$, $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2\,000$
$1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\,000 \times 1{,}015^n = +\infty$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur ou égal à 3 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $2\,000 \times 1{,}015^n \geqslant 3\,000$

$A \leftarrow 2000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A < 3000$
    $A \leftarrow 1{,}015 \times A$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 28.
Donc pour tout entier $n \geqslant 28$, $u_n \geqslant 3000$. Soit pour tout entier $n \geqslant 28$, $2000 \times 1{,}015^n \geqslant 3000$.

III SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Soients a et b deux réels.
La suite (u_n) définie pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial u_0 est une suite *arithmético-géométrique*

REMARQUE

— Si $a = 1$ la suite est arithmétique.

— Si $b = 0$ la suite est géométrique.

— Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

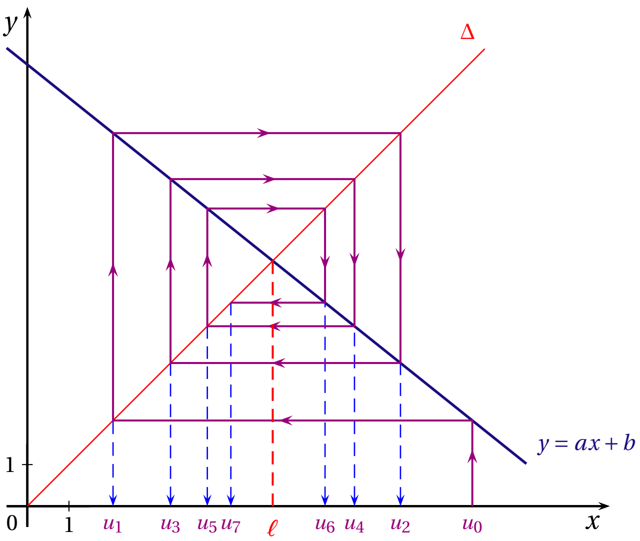
2 ÉTUDIER UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

a et b sont deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
(u_n) est la suite arithmético-géométrique définie par u_0 et pour tout entier n, $u_{n+1} = au_n + b$.

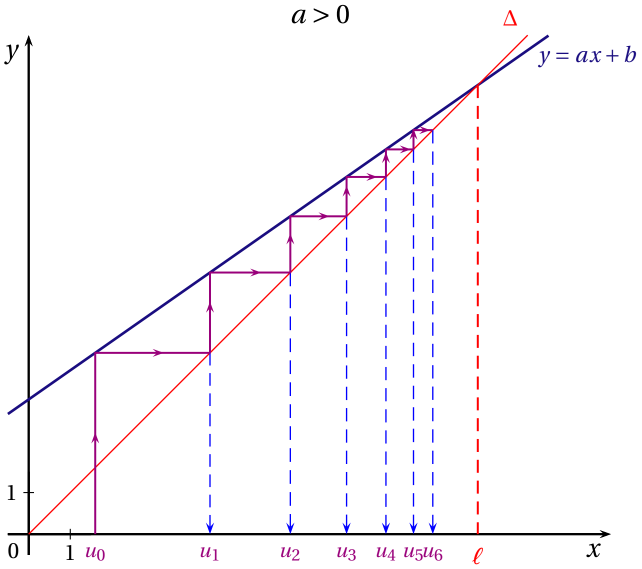
REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$

$a < 0$



$a > 0$



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

UNE SUITE AUXILIAIRE

PROPOSITION

Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier n, par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

✳ PREUVE

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= au_n - a\ell \\ &= a \times (u_n - \ell) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n, $v_{n+1} = a \times v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.

CONSÉQUENCE

(v_n) est une suite géométrique de raison a et $v_0 = u_0 - \ell$ donc pour tout entier n, $v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$.
Comme $v_n = u_n - \ell \Leftrightarrow u_n = v_n + \ell$, on en déduit que : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell).}$

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 250$.

2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 125\,000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times u_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1{,}002 \times v_n \end{aligned}$$

   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1\,000 + 125\,000 = 126\,000$.

3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
   (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126\,000$ donc pour tout entier n, $v_n = 126\,000 \times 1{,}002^n$.
   Donc pour tout entier n, $u_n = 126\,000 \times 1{,}002^n - 125\,000$.

4. *Étude de la suite (u_n).*
   a) *Variation*
      Pour tout entier n, $u_n = 126\,000 \times 1{,}002^n - 125\,000$. Par conséquent, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1{,}002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^n \\ &= 126000 \times 1{,}002^n \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^n \end{aligned}$$

      D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) *Limite*

Comme $1{,}002 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 126\,000 \times 1{,}002^n - 125\,000 = +\infty$.

c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*

On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15\,000$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15 000.

```
U ← 1 000
N ← 0
Tant que U ⩽ 15 000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.

Donc le capital disponible dépassera 15 000 € au bout de 53 mois.