EXERCICE 1

Monsieur et madame X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains ont été échangées.
Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main.
Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.
M. X constate que les autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.
Combien de poignées de mains M. X a-t-il échangé avec les autres membres de la réunion ?

EXERCICE 2

Lors d'une soirée, certaines personnes se serrent la main.

1. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.
2. La conjecture : « Au cours de la soirée, deux personnes ont serré le même nombre de mains » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 3

Est-il possible de tracer cinq segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement trois autres ?

EXERCICE 4

Pour chacune des listes suivantes, déterminer s'il existe un graphe simple admettant cette liste pour liste des degrés des sommets. S'il existe un tel graphe, le dessiner, sinon expliquer pourquoi.

1. (0,1,2,3,4,5)
2. (2,3,3,4,4,5)
3. (1,1,1,3)
4. (1,1,2,4,4)
5. (2,3,3,4,5,6,7)

EXERCICE 5

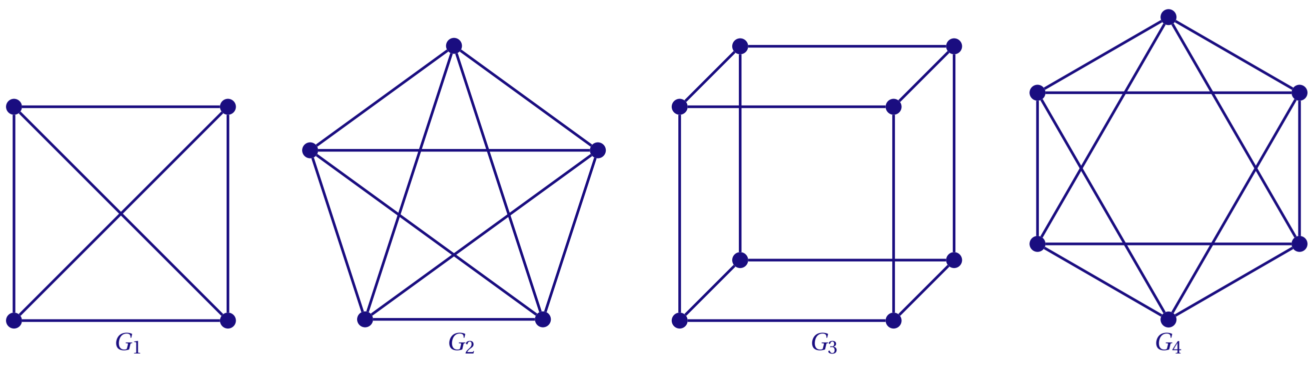
1. Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple G si la liste des degrés des sommets est $(2,2,3,3,4)$?
2. Dans un graphe simple d'ordre n, quel est le nombre maximal d'arêtes ?

EXERCICE 6

Trouver deux graphes d'ordre 5 qui ne sont pas isomorphes et dont les degrés des sommets sont donnés par la liste $(1,2,2,2,3)$.

EXERCICE 7

Un graphe est « *planaire* » si on peut le dessiner dans le plan sans que deux arêtes se croisent.
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



EXERCICE 8

1. Dessiner le graphe simple d'ordre 8 dont l'ensemble des arêtes est :

$$A = \{(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;7),(3;5),(3;6),(3;7),(4;5),(4;7),(5;6),(5;7),(6;7),(6;8),(7;8)\}$$

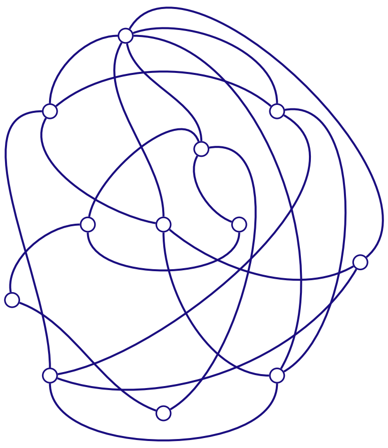
2. Donner la matrice M associée à ce graphe.
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 permettant de se rendre du sommet 1 au sommet 8 ?
   Les donner tous.
4. Est-il possible de parcourir toutes les arêtes de ce graphe sans passer plus d'une fois par la même arête ?
   Si oui donner un parcours possible.
5. Existe-il un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ?

EXERCICE 9

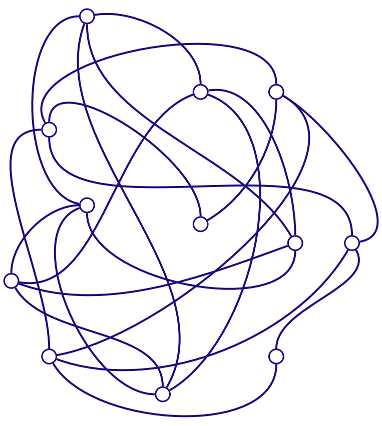
1. Dessiner un graphe simple dont la liste des degrés des sommets est (6,6,2,2,2,2,2,1,1)
   a) qui possède une chaîne eulérienne ;
   b) qui ne possède pas de chaîne eulérienne.
2. Est-il possible d'avoir un graphe qui possède un cycle eulérien si la liste des degrés des sommets est (6,6,4,2,2,2,2) ?

EXERCICE 10

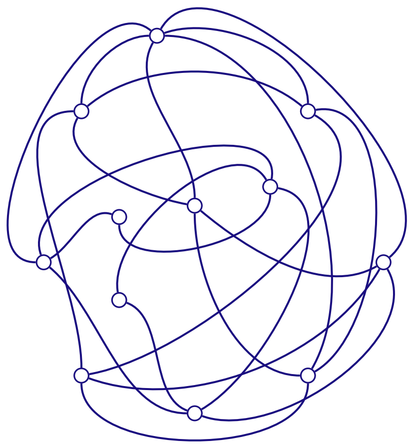
Pour chacun des graphes suivants, existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?



Graphe G



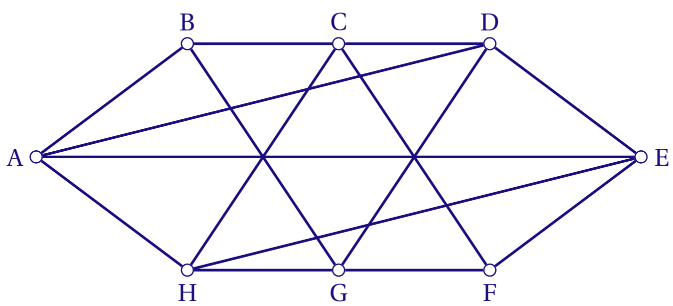
Graphe H



Graphe I

EXERCICE 11

On considère le graphe suivant :



1. Le graphe est-il connexe ?
2. Le graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.

3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe . Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Soit M la matrice associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

   On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 12 & 7 & 8 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 11 & 1 & 8 & 1 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 12 & 4 & 10 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 1 & 10 & 0 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

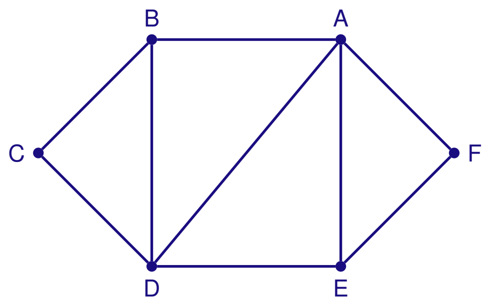
   Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet G et aboutissant au sommet E.
   Citer alors toutes ces chaînes.

EXERCICE 12

PARTIE A

Le graphe suivant modélise le plan d'une zone résidentielle. Les arêtes du graphe représentent les rues et les sommets du graphe les carrefours.

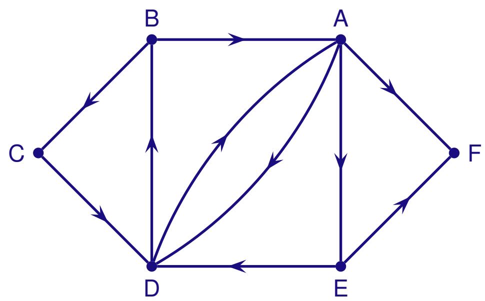
1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces rues sans emprunter plusieurs fois la même rue :
   a) en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
   b) en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.



PARTIE B

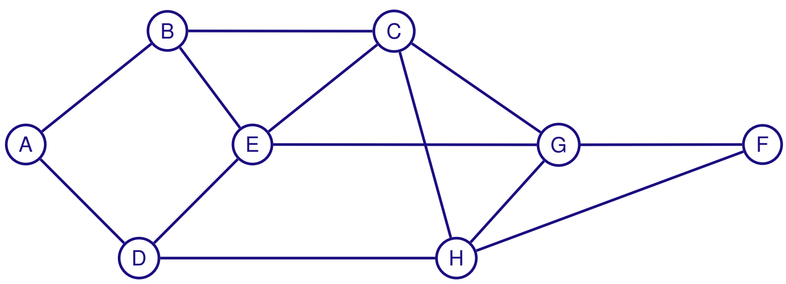
Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même zone résidentielle, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes rues.

1. Expliquer pourquoi le sommet F représente une impasse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)
3. En partant du carrefour C quel est le nombre minimal de rues qu'il faut emprunter pour arriver en E ?
4. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 qui arrivent en F ?



EXERCICE 13

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Déterminer en justifiant si ce graphe est : complet ? connexe ?

3. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.
4. On range les sommets par ordre alphabétique. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
5. Une des trois matrices R, S ou T est la matrice M^3.

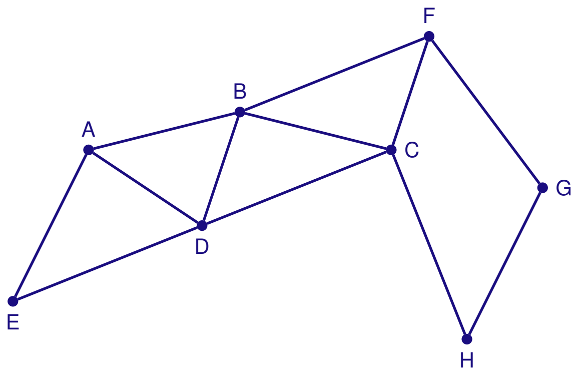
$$R=\begin{pmatrix}0&5&3&5&2&2&4&2\\5&2&7&2&8&3&3&5\\3&7&6&4&9&3&9&20\\5&2&4&0&9&2&3&8\\2&8&9&9&4&4&20&4\\2&3&3&2&4&2&6&6\\4&3&9&3&20&6&6&9\\2&5&20&8&4&6&9&4\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}0&5&3&5&1&1&4&1\\5&2&7&2&8&3&3&5\\3&7&6&4&9&3&9&10\\5&2&4&0&9&2&3&8\\1&8&9&9&4&4&10&4\\1&3&3&2&4&2&6&6\\4&3&9&3&10&6&6&9\\1&5&10&8&4&6&9&4\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}0&5&3&5&1&2&4&5\\5&2&7&2&8&3&3&5\\3&7&6&4&9&3&9&10\\5&2&4&0&9&2&3&8\\1&8&9&9&4&4&10&4\\1&3&3&2&4&2&6&6\\4&3&9&3&10&6&6&9\\5&1&10&8&4&6&9&4\end{pmatrix}$$

a) Sans calculer la matrice M^3, indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant votre choix.

b) Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à F. Les citer tous.

EXERCICE 14 (*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2016*)

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent des lieux où sont placés les indices; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



PARTIE A

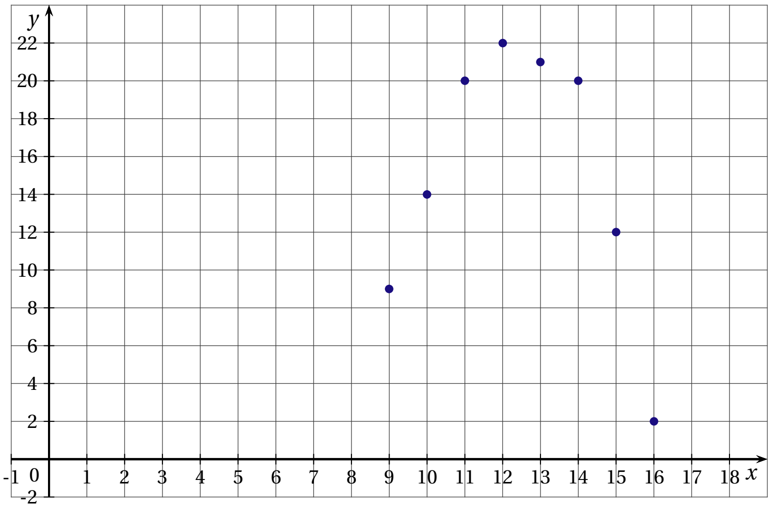
1. Un enfant pourra-t-il parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule? Si oui, indiquer un circuit possible et sinon expliquer pourquoi.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice $M^4=\begin{pmatrix}20&18&20&21&11&13&5&5\\18&32&25&25&17&16&10&10\\20&25&31&19&13&13&14&5\\21&25&19&31&13&21&4&12\\11&17&13&13&11&6&4&3\\13&16&13&21&6&20&3&13\\5&10&14&4&4&3&9&1\\5&10&5&12&3&13&1&10\end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre de parcours allant de E à H en 4 chemins pédestres. Les citer tous.

PARTIE B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9h à 16h. On obtient le relevé suivant :

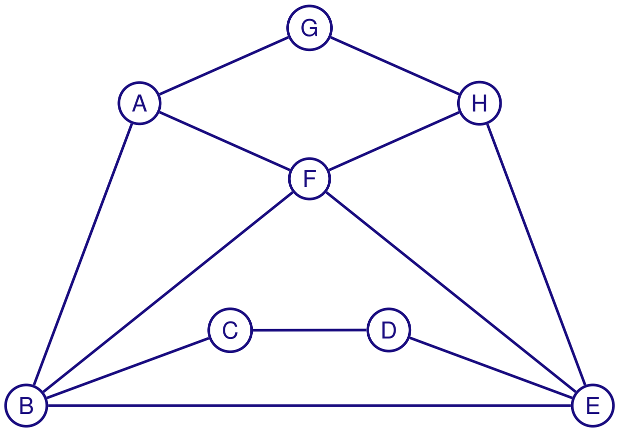


Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.
On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points $(9;9)$, $(11;20)$ et $(16;2)$ appartiennent à la représentation graphique de f.

1. Calculer les trois réels a, b et c.
2. En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.

EXERCICE 15

On considère le graphe Γ ci-dessous.



PARTIE A

1. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
2. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 1 & 6 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 8 & 6 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer, en justifiant, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à H. Les citer toutes.
   b) Quelle est la distance entre les sommets B et G ?
3. a) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.
   b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.

PARTIE B

Le graphe Γ modélise le plan d'un parc. Les arêtes du graphe représentent les allées du parc et les sommets du graphe sont les intersections.
En fin de journée, un agent du service d'entretien fait le tour du parc pour nettoyer les allées.

1. Est-il possible de planifier un parcours pour que cet agent passe par toutes les allées sans emprunter plusieurs fois la même allée ? Justifier la réponse. Si oui proposer un parcours.
2. Pour rationaliser le nettoyage des allées, on souhaite établir un circuit commençant et finissant par l'entrée du parc G et qui passe par toutes les allées une et une seule fois.

   Quel est le nombre minimal d'allées qu'il faudrait tracer pour obtenir un tel circuit.

PARTIE C

La buvette du parc vend des crêpes (3,50 €), des glaces (3 €) et des bouteilles d'eau minérale (2,50 €).
À la fin d'une journée, la recette est de 1 120 €.
Le responsable de la buvette constate qu'il a vendu deux fois plus de bouteilles d'eau minérale que de crêpes et que le nombre de glaces vendues est égal à la somme du nombre de bouteilles d'eau minérale et de crêpes vendues.
On note a le nombre de glaces, b le nombre de bouteilles d'eau minérale et c le nombre de crêpes qui ont été vendues ce jour là.

1. Justifier que a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 3a+2{,}5b+3{,}5c=1120 \\ b-2c=0 \\ a-b-c=0 \end{cases}$.
2. Déterminer les matrices A, X et B pour que le système précédent soit équivalent à $AX=B$.
3. Déterminer a, b et c. Interpréter le résultat.