Devoir Surveillé n°1
Terminale ES Spé
Matrices
Durée 1 heure - Coeff. 3
Noté sur 20 points

Exercice 1. Matrice et suites — 10 points

On considère les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. Calculer D^2 et D^3.

2. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

3. Soit A la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Montrer par le calcul que :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que

$$A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}\, u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

1. Pour tout entier n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a. Donner V_0 et V_1.

1. b. Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.

2. On admet que pour tout entier n :

$$V_n = A^n \times V_0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} A^n = P \times D^n \times P^{-1} \\ D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. a. Calculer V_6.

2. b. En déduire les valeurs de u_6 et u_7.

Exercice 2. 10 points

Un constructeur d'ordinateurs portables fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

- Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les ordinateurs
- et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	16 h	20 h	28 h
Modèle 2	12 h	12 h	20 h
Modèle 3	24 h	20 h	36 h

Tableau 2	
Poste 1	12 €/h
Poste 2	10 €/h
Poste 3	7 €/h

1. Soit H et C les deux matrices suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 28 \\ 12 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 36 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. a. Donner la matrice produit :

$$P = H \times C$$

1. b. Que représentent les coefficients de la matrice P ?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

- Modèle 1 : 488 € ;
- Modèle 2 : 336 € ;
- Modèle 3 : 616 €.

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

2. a. Montrer que les réels a, b et c doivent vérifier l'égalité :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$$

2. b. Montrer rapidement (sans détailler tous les calculs) que la matrice inverse de la matrice H est :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

2. c. En déduire les réels a, b et c. Interpréter le résultat.

Fin du devoir

Bonus

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.