Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 24 novembre 2016

EXERCICE 1

Algorithme d'Euclide **(2 points)**

1) On a les divisions successives suivantes :

$$7\,545 = 2\,012 \times 3 + 1\,509$$
$$2\,012 = 1\,509 \times 1 + 503$$
$$1\,509 = 503 \times 3$$

pgcd$(7\,545\ ;\ 2\,012) = 503$

$$1\,386 = 546 \times 2 + 294$$
$$546 = 294 \times 1 + 252$$
$$294 = 252 \times 1 + 42$$
$$252 = 42 \times 6$$

pgcd$(1\,386\ ;\ 546) = 42$

2) On a donc les divisions suivantes :

$$\begin{cases} 1\,809 = bq + 9 \\ 2\,527 = bq' + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\,800 = bq \\ 2\,520 = bq' \end{cases} \quad , \quad b > 9$$

b est donc un diviseur commun de 1 800 et 2 520.
La plus grande valeur possible pour b est pgcd(1800 , 2520).

$b_{\text{max}} = \text{pgcd}(1800\ ,\ 2520) = 10\text{pgcd}(180\ ;\ 252)$.

Calculons pgcd(180 , 252) par l'algorithme d'Euclide.

$$252 = 180 \times 1 + 72$$
$$180 = 72 \times 2 + 36$$
$$72 = 36 \times 2$$

Donc pgcd$(252\ ,\ 180) = 36$
donc $b_{\text{max}} = 10\text{pgcd}(180\ ;\ 252) = 360$

EXERCICE 2

Théorème de Bézout **(7 points)**

1) a) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$.

b) Sens direct : a et b sont premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$.

Réciproquement : on a $au + bv = 1$. Soit $D = \text{pgcd}(a, b)$. D est un diviseur de a et de b donc il divise toute combinaison linéaire de a et de b, il divise donc $au + bv = 1$. En conséquence $D = 1$.

2) $-5a + 7b = -35n - 20 + 35n + 21 = 1$.

il existe un couple $(u, v) = (-5\ ,\ 7)$ tel que $au + bv = 1$, d'après le théorème de Bézout a et b sont premiers entre eux.

3) $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 70n + 15 - 70n - 14 = 1$.

il existe un couple $(u, v) = (5\ , -14)$ tel que $u(14n + 3) + v(5n + 1) = 1$, d'après le théorème de Bézout $(14n + 3)$ et $(5n + 1)$ sont premiers entre eux.

$87 = 14 \times 6 + 3$ et $31 = 5 \times 6 + 1$, donc 87 et 31 sont respectivement de la forme de $(14n + 3)$ et $(5n + 1)$; ils sont donc premiers entre eux.

4) On a :

$23 = 13 \times 1 + 10 \quad (1)$
$13 = 10 \times 1 + 3 \quad (2)$
$10 = 3 \times 3 + 1 \quad (3)$
donc $\text{pgcd}(23, 13) = 1$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

de (3) $\quad 3 \times 3 = 10 - 1$

$$\begin{aligned}(2)\times 3 \quad 13 \times 3 &= 10 \times 3 + 10 - 1\\ &= 10 \times 4 - 1\\ 10 \times 4 &= 13 \times 3 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1)\times 4 \quad 23 \times 4 &= 13 \times 4 + 13 \times 3 + 1\\ &= 13 \times 7 + 1\end{aligned}$$

$23(4) + 13(-7) = 1$, une solution est donc $(4\,, -7)$

Exercice 3

Solution d'une équation diophantienne **(3 points)**

1) L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple de $\text{pgcd}(a, b)$

2) Applications :

a) $\text{pgcd}(12, 4) = 4$, et 3 n'est pas un multiple de 4 donc, d'après le corollaire du théorème de Bézout, l'équation $12x + 4y = 3$ n'admet pas de solution entière.

b) $338 = 221 \times 1 + 117$
$221 = 117 \times 1 + 104$
$117 = 104 \times 1 + 13$
$104 = 13 \times 8$

donc $\text{pgcd}(221, 338) = 13$, or 26 est un multiple de 13, donc, d'après le corollaire du théorème de Bézout, l'équation $221x + 338y = 26$ admet des solutions entières.

Exercice 4

Vrai-faux **(6 points)**

a) **Proposition 1 : fausse**

$2009 = 16 \times 125 + 9$ et $81 = 16 \times 5 + 1$, donc $2009 \equiv 9\ (16) \Rightarrow 2009^2 \equiv 81 \equiv 1\ (16)$

D'après les règles de compatibilité :

$2009^{8001} \equiv (2009^2)^{4000} \times 2009 \equiv 1^{4000} \times 9 \equiv 9\ (16)$

Le reste de 2009^{8001} par 16 est 9.

b) **Proposition 2 : vraie**

$11 = 7 \times 1 + 4$, donc $11 \equiv 4\ (7) \Rightarrow 11^{2001} \equiv 4^{2001}\ (7)$.

Déterminons le cycle des restes de la division de 4^n par 7 :

$4^0 \equiv 1\ (7)$, $4^1 \equiv 4\ (7)$, $4^2 \equiv 2\ (7)$, $4^3 \equiv 8 \equiv 1\ (7)$.

Le cycle des reste de 4^n par 7 est de 3. Or 2001 est divisible par 3 : $2001 = 3 \times 667$. D'après les règles de compatibilité :

$4^{2001} \equiv (4^3)^{667} \equiv 1^{667} \equiv 1\ (7)$.

Le reste de 11^{2001} par 7 est 1.

c) **Proposition 3 : fausse**

Pour exhiber un contre exemple faisons un tableau de congruence :

$x \equiv \ (5)$	0	1	2	3	4
$2x^2 \equiv \ (5)$	0	2	3	3	2
$x-1 \equiv \ (5)$	4	0	1	2	3
$2x^2+x-1 \equiv \ (5)$	4	2	4	0	0

D'après le tableau de congruence, si $x \equiv 4\ (5)$ alors $2x^2+x-1 \equiv \ (5)$. Ceci est donc notre contre-exemple.