Correction contrôle de mathématiques

du mardi 06 décembre 2011

Exercice 1

Question de cours. (3 points)

1) L'équation $ax+by = c$ admet des solutions entières **si et seulement si** c est un multiple du $PGCD(a, b)$.

2) Dans le sens $\Rightarrow$

   $ax + by = c$ admet une solution (x_0, y_0).
   Comme $D = PGCD(a, b)$ divise a et b il divise $ax_0 + by_0$.
   D divise donc c

   Dans le sens $\Leftarrow$

   c est un multiple de $D = PGCD(a, b)$.
   Donc il existe un entier relatif k tel que : $c = kd$
   De l'égalité de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = D$$

   En multipliant par k, on obtient :

$$auk + bvk = kD \iff a(uk) + b(vk) = c$$

   Donc il existe $x_0 = uk$ et $y_0 = vk$ tels que $ax_0 + by_0 = c$

3) L'équation $6x + 3y = 1$ n'admet pas de solutions entières car $\text{pgcd}(6, 3) = 3$ et 1 n'est pas multiple de 3
   L'équation $7x+5y = 1$ admet des solutions entières car $\text{pgcd}(7, 5) = 1$ et 1 est multiple de 1.

Exercice 2

pgcd et ppcm. (3 points)

1) On a avec l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}7545 &= 2012 \times 3 + 1509\\ 2012 &= 1509 \times 1 + 503\\ 1509 &= 503 \times 3\end{aligned}$$

   donc le $\text{pgcd}(2012, 7545) = 503$.

2) On a :

$$(-2)(7k + 3) + 7(2k + 1) = -14k - 6 + 14k + 7 = 1$$

   Donc il existe $(u, v) = (-2; 7)$ tel que $u(7k + 3) + v(2k + 1) = 1$
   D'après le théorème de Bezout, les nombres $7k + 3$ et $2k + 1$ sont premiers entre eux.

3) Soit x et y, $x < y$, les entiers positifs. On pose d =PGCD(x, y) et m =PPCM(x, y). On a alors :

$$x = dx' \quad y = dy' \quad \text{avec} \quad \text{PGCD}(x', y') = 1 \quad \text{et} \quad m = dx'y'$$

En remplaçant, on trouve :

$$156 = 12x'y' \quad \Leftrightarrow \quad x'y' = 13$$

or 13 n'a que deux diviseurs 1 et 13, donc $x' = 1$ et $y' = 13$ qui sont premiers entre eux. Les deux entiers sont donc $x = 12$ et $y = 6 \times 13 = 156$.

Exercice 3

Vrai - Faux (5 points)

1) La **proposition 1 est fausse** car pour $n = 4$, on a $3n = 12$ et $2n+1 = 9$ et pgcd$(12, 9) = 3$

2) La **proposition 2 est vrai :** En effet le couple (-1 ;-1) est solution de $(E)\ :\ 3x-5y = 2$ car $3(-1) - 5(-1) = -3 + 5 = 2$.

   Soit (x, y) la solution générale de (E). On a alors : $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3(-1) - 5(-1) = 2 \end{cases}$

   Par soustraction des deux équations on obtient : (1) : $3(x + 1) = 5(y + 1)$
   5 divise $3(x + 1)$ comme 5 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(x + 1)$, on al alors :
   $$x + 1 = 5k \quad k \in \mathbb{Z}$$

   En remplaçant dans (1), on obtient alors : $y + 1 = 3k$.

   Les solutions sont donc de la forme : $x = -1 + 5k$ et $y = -1 + 3k$.

3) La **proposition 3 est fausse** En effet $7 \times 1 + 5 \times (-2) = 7 - 5 = 2$, or 7 et 5 sont premiers entre eux.

4) La **proposition 4 est fausse** Cherchons les racines de l'équation (E), on a :

$$\Delta = 52^2 - 4 \times 480 = 784 = 28^2$$

   On obtient alors les racines : $x_1 = \dfrac{52 + 28}{2} = 40$ et $x_2 = \dfrac{52 - 28}{2} = 12$
   Or le pppcm est un multiple du pgcd ce qui n'est pas le cas avec 40 et 12.

Exercice 4

Nouvelle-calédonie dec 2007 (partiel) (4 points)

1) a) (E) n'a pas de solution entière car le pgcd$(65, 40) = 5$, 1 n'est pas multiple de 5, d'après le corollaire de Bezout cette équation n'a pas de solution.

   b) Par contre pgcd$(17, 40) = 1$ et 1 est multiple de 1, donc d'après ce même théorème, (E') admet des solutions entières.

c) On a :

$$\begin{aligned} &40 = 17 \times 2 + 6 \quad (1)\\ &17 = 6 \times 2 + 5 \quad (2)\\ &6 = 5 \times 1 + 1 \end{aligned}$$

On remonte l'algorithme

$$\begin{aligned} &5 = 6 - 1 \qquad \text{en remplaçant dans (2)}\\ &17 = 6 \times 2 + 6 - 1\\ &17 = 6 \times 3 - 1 \quad \text{donc} \quad 6 \times 3 = 17 + 1 \quad \text{en remplaçant dans (1)}\times 3\\ &40 \times 3 = 17 \times 6 + 17 + 1\\ &40 \times 3 = 17 \times 7 + 1 \end{aligned}$$

On a alors $17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$. On obtient alors la solution $(-7; -3)$

d) Soit (x, y), la solution générale de (E'), on a alors :

$$\begin{cases} 17x - 40y = 1\\ 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{cases}$$

Par soustraction des deux équations, on a :

$$17(x + 7) = 40(y + 3) \qquad (1)$$

40 divise $17(x + 7)$, comme 40 et 17 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 40 divise $(x + 7)$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \quad x + 7 = 40k$$

En remplaçant dans (1), on obtient : $y + 3 = 17k$

Les solutions (x, y) sont de la forme :

$$\begin{cases} x = -7 + 40k\\ y = -3 + 17k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $17x_0 \equiv 1 \quad [40]$, alors $17x_0 = 1 + 40y$ donc x_0 est solution de (E'), donc :

$$0 \leqslant -7 + 40k < 40 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{40} \leqslant k < \frac{47}{40} \quad \text{soit} \quad k = 1$$

$x_0 = 33$

2) Comme $a^{17} \equiv b\ [55] \quad \Rightarrow \quad \left(a^{17}\right)^{33} \equiv b^{33}\ [55] \quad \Rightarrow \quad a^{17\times 33} \equiv b^{33}\ [55]$

d'après la question précédante $17 \times 33 \equiv 1\ [40] \quad \Rightarrow \quad 17 \times 33 = 1 + 40k$

Comme de plus $a^{40} \equiv 1\ [55]$, on a donc :

$$a^{17\times 33} \equiv \left(a^{40}\right)^k \times a \equiv a\ [55]$$

On a donc : $b^{33} \equiv a\ [55]$

Exercice 5

Antille Guyane juin 2001 (5 points + 1 point bonus)

1) a) a doit diviser ℓ et L. Donc $a_{\max} = \text{pgcd}(\ell, L) = \text{pgcd}(882, 945)$

Par l'algorithme d'Euclide :

$$945 = 882 \times 1 + 63$$
$$882 = 63 \times 14$$

On a donc : $a_{\max} = 63$

Les valeurs possibles pour a sont les diviseurs de 63 : $a \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

b) Le volume de la boîte B est : $v = \ell^2 \times L$, on a donc : $\ell^2 \times L = 77\,760$

On sait que : $a_{\max} = \text{pgcd}(\ell, L) = d = 12$

On pose : $\ell = d\ell'$ et $L = dL'$ avec $\text{pgcd}(\ell', L) = 1$, on a alors :

$v = d^3\ell'^2L'$ d'où $\ell'^2L' = \dfrac{77\,760}{12^3} = 45$

Comme $45 = 1^2 \times 45$ ou $45 = 3^2 \times 5$ on en déduit alors :

$(\ell', l') = (1, 45)$ ou $(\ell', l') = (3, 5)$, les dimensions de la boîte B droit sont donc :

$\ell = 12$ et $L = 12 \times 45 = 540$ ou $\ell = 12 \times 3 = 36$ et $L = 12 \times 5 = 60$

2) a) c doit être multiple de ℓ et L, on a donc : $c_{min} = \text{ppcm}(\ell, L) = \text{ppcm}(882, 945)$, donc :

$$c_{min} = \frac{\ell \times L}{\text{pgcd}(882, 945)} = \frac{882 \times 945}{63} = 13\,230$$

Les valeurs possibles pour c sont les multiples positifs de 13 230

b) **(bonus)** Le volume de la boîte B est : $v = \ell^2 \times L$, on a donc : $\ell^2 \times L = 15\,435$

On sait que : $c_{\min} = \text{ppcm}(\ell, L) = m = 105$

On pose : $\ell = d\ell'$ et $L = dL'$ avec $\text{pgcd}(\ell', L) = 1$, on a alors :

$m = d\ell'L'$ et $v = d^3\ell'^2L' = d\ell'L' \times d^2\ell' = md^2\ell'$ donc $d^2\ell' = \dfrac{15\,435}{105} = 147$

or $147 = 3 \times 7^2$ et $\ell' \leqslant 105$ on en déduit alors : $d = 7$ et $\ell' = 3$

De $m = d\ell'L'$ on en déduit que : $L' = \dfrac{m}{d\ell'} = \dfrac{105}{21} = 5$

Les dimensions de la boîte B sont donc : $\ell = 7 \times 3 = 21$ et $L = 5 \times 7 = 35$