Contrôle de mathématiques

Jeudi 11 mai 2017

EXERCICE 1

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs, (E) : $7x - 3y = 1$.

1) Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables : X, Y  nombres entiers
Traitement
    pour X variant de −5 à 10 faire
        pour (1) ........... faire
            si (2)........... alors
                Afficher X et Y
            fin
        fin
    fin
```

2) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

   b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

   c) Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $7x - 3y - 1 = 0$.
On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\ :\ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\[2mm] y_{n+1} = -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1) On note **M** la matrice $\begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_n$.

   b) Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, $\mathbf{X}_n$ en fonction de $\mathbf{M}^n$ et $\mathbf{X}_0$.

2) On considère la matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de **P**, notée $\mathbf{P}^{-1}$, est définie par $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ est une matrice diagonale **D** que l'on précisera.

   b) Pour tout entier naturel n, donner $\mathbf{D}^n$ sans justification.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{M}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$.

3) On admet que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} -14 + \dfrac{15}{2^n} & 6 - \dfrac{6}{2^n} \\ -35 + \dfrac{35}{2^n} & 15 - \dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

4) Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 2

Facultatif **(bonus)**

1) a) Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

2) On donne les matrices : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice $6\mathbf{A} - \mathbf{A}^2$.

b) En déduire que $\mathbf{A}$ est inversible et que sa matrice inverse, notée $\mathbf{A}^{-1}$, peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A}^{-1} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{A}$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c) Vérifier que : $\mathbf{B} = 5\mathbf{A}^{-1}$.

d) Démontrer que si $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$, alors $5\mathbf{X} = \mathbf{BY}$.