Contrôle de mathématiques

Lundi 09 avril 2018

EXERCICE 1

Questions de cours **(5 points)**

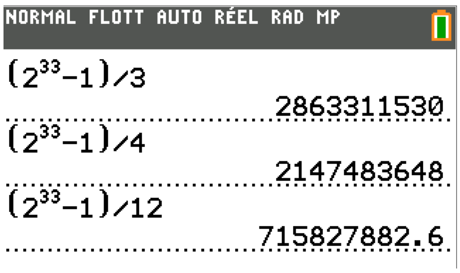
1) a) Énoncer le critère d'arrêt pour savoir si un nombre est premier ou non.
   b) Application : démontrer que 317 est premier. On se justifiera.
2) Démontrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.
3) Décomposer 27 720 en produit de facteurs premiers. On se justifiera.
   Quel est alors le nombre de diviseurs de 27 720 ?

EXERCICE 2

Nombres de Mersenne **(5 points)**

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelés nombres de Mersenne.
On s'intéresse au nombre de Mersenne : $2^{33} - 1$.

1) Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats suivants :



   Il affirme alors que 3 et 4 divise $2^{33} - 1$ mais pas 12.
   a) En quoi cette affirmation contredit le corollaire du théorème de Gauss.
   b) Montrer que 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.
   c) En remarquant que $2 \equiv -1$ [3], montrer que 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.
2) a) Calculer la somme : $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + (2^3)^{10}$.
   b) En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

EXERCICE 3

Nombre de diviseurs **(4 points)**

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $18n$ est le double du nombre de diviseurs de n.

1) Montrer que $18n = 2^{\alpha+1}3^{\beta+2}$.
2) Montrer alors que : $\alpha(\beta - 1) = 4$.
3) En déduire les valeurs possibles pour n.

EXERCICE 4

Triplets pythagoriciens **(6 points)**

Un triplet pythagoricien, noté TP, est un triplet (x, y, z) d'entiers naturels non nul tel que :

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{avec} \quad x < y < z$$

1) Montrer que les triplets (3,4,5) et (5, 12, 13) sont des TP.
2) a) Démontrer que si (x, y, z) est un TP, et $p \in \mathbb{N}^*$, alors le triplet (px, py, pz) est lui aussi un TP.
   b) Décomposer 2 015 en produit de facteurs premiers.
   c) En utilisant le fait que (3,4,5) est un TP, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2\,015)$.
3) On admet que $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2\,015, y, z)$.
4) a) En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tel que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b) En déduire un TP de la forme $(x, 2\,015, z)$.