# Contrôle de mathématiques

Mardi 19 février 2013.

## EXERCICE 1

**Question de cours. (5 points)**

1) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
2) a) Énoncer le critère d'arrêt pour qu'un nombre soit premier.
   b) Donner la liste de nombres premiers inférieurs à 50. Les nombres 577 et 689 sont-il premiers ? On expliquera clairement la méthode utilisée.
3) Déterminer le nombre de diviseurs de 792. On énoncera la propriété utilisée.

## EXERCICE 2

**Triplet premier ? (3 points)**

Est-il possible de trouver un nombre premier $p$ tel que $p + 1000$ et $p + 2000$ soient aussi premiers ?
On raisonnera modulo 3, c'est à dire que l'on analysera successivement les cas $p \equiv 0$, $p \equiv 1$ et $p \equiv 2$ modulo 3.

## EXERCICE 3

**Nombre d'éléments (5 points)**

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où $a$ est un chiffre supérieur ou égal à 2 et $b$ est un chiffre quelconque.
Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119.
On cherche le nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1) a) Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.
   b) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2) a) Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
   b) Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3) Soit $n$ un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
   a) Montrer que : « $n$ est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».
   b) Montrer que : « $n$ est divisible par 7 » équivaut à « $b$ est divisible par 7 ».
4) Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

## EXERCICE 4

**Nombre de diviseurs (3 points)**

Un nombre $n$ s'écrit $2^{\alpha}3^{\beta}$. Le nombre de diviseurs de $36n$ est le triple du nombre de diviseurs de $n$.

Déterminer les valeurs de $n$ possibles.

## EXERCICE 5

**Logique** **(4 points)**

Pour chacune des propositions suivantes

1) préciser si elle est vraie ;
2) énoncer la réciproque ;
3) préciser si cette proposition réciproque est vraie.

- **Proposition 1 :** "Si $n$ divise $a^2$, alors $n$ divise $a$"
- **Proposition 2 :** "Si $n$ est premier, alors $n$ est impair"
- **Proposition 3 :** "Si $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts, alors $p$ et $q$ sont premiers entre eux"
- **Proposition 4 :** "Si $p$ est un nombre premier, alors $p$ admet exactement deux diviseurs"
- **Proposition 5 :** "Si $p$ premier divise le produit $ab$, alors $p$ divise $a$ ou $p$ divise $b$"
- $p$ est un nombre premier
  **Proposition 6 :** "Si $a \equiv p \pmod{p}$, alors $a$ est premier"