Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 19 novembre 2015

EXERCICE 1

Multiples **(5 points)**

1) 450 a 19 diviseurs :

$$D_{450} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450\}$$

2) $5x^2 - 7xy = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x(5x - 7y) = 17$

   x est $5x - 7y$ sont une décomposition de 17 qui n'a que 2 diviseurs positifs 1 et 17. On a donc les systèmes suivants :

   $$\begin{cases} x = 1 \\ 5x - 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 7y = 5x - 17 = -12 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

   ou

   $$\begin{cases} x = 17 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ 7y = 5x - 1 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 12 \end{cases}$$

   L'équation n'a qu'un couple solution (17 ; 12)

3) $(n^2 - 1) = (n - 1)(n + 1)$ comme n est impair alors $(n - 1)$ et $(n + 1)$ sont deux nombres pairs consécutifs donc l'un des deux est multiple de 4. Le produit est alors multiple de 8.

   Autre méthode : Si n est impair alors $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$. On a alors :
   $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$
   k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair. $4k(k + 1)$ est alors multiple de 8.

4) La fraction est entière si, et seulement si, $(2n + 1)$ divise $(6n + 12)$. Il existe alors un entier relatif k tel que :

   $$6n + 12 = k(2n + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 3(2n + 1) + 9 = k(2n + 1) \quad \Leftrightarrow \quad (2n + 1)(k - 3) = 9$$

   $(2n + 1)$ divise donc 9. On remplit alors le tableau solution suivant en considérant tous les diviseurs relatifs de 9.

$2n + 1$	-9	-3	-1	1	3	9
$2n$	-10	-4	-2	0	2	8
n	-5	-2	-1	0	1	4

EXERCICE 2

Division euclidienne. Vrai ou faux **(4 points)**

1) $-2016 = 17(-119) + 7$

2) On a : $524 = 15b + r$ avec $0 \leqslant r < b$, on a alors

$$15b \leqslant 524 < 16b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{524}{16} \approx 32,75 < b \leqslant \frac{524}{15} \approx 34,9 \quad \Leftrightarrow \quad 33 \leqslant b \leqslant 34$$

Il y a donc deux valeurs pour b

- $b = 33$ alors $r = 524 - 15 \times 33 = 29$
- $b = 34$ alors $r = 524 - 15 \times 34 = 14$

3) a) **Proposition vraie**, en effet si :
$n = 66q + 5 = 11(6q) + 5$, comme 5 est inférieur à 11, 5 est bien de reste de la division de n par 11.

b) **Proposition fausse**. La réciproque de la première proposition est fausse. Pour s'en convaincre, prenons le contre exemple : 115.
$115 = 11 \times 10 + 5$ et $115 = 66 \times 1 + 49$
Le reste de 115 par 11 est 5 mais le reste de 115 par 66 est 49 !

Exercice 3

ROC. Congruence **(7 points)**

1) Voir le cours

2) $2015 = 12 \times 167 + 11$ donc $2015 \equiv 11\ (12)$, or $11 \equiv -1\ (12)$,

donc, d'après la compatibilité de la congruence avec la puissance, on a :

$2015^{2016} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \equiv 11\ (12)$.

Le reste de 2015^{2015} dans la division par 12 est 11.

3) $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \times \left(3^2\right)^n + 2^2 \times 2^n = 3 \times 9^n + 4 \times 2^n$

or $9 \equiv 2\ (7)$ car $9 = 7 \times 1 + 2$

d'après la compatibilité de la congruence avec la puissance, on a :

$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n \equiv 7 \times 2^n \equiv 0\ (7)$

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est donc divisible par 7.

4) a) On a le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \quad (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv \quad (7)$	0	1	4	2	2	4	1
$x + 1 \equiv \quad (7)$	1	2	3	4	5	6	0
$x^2 + x + 1 \equiv \quad (7)$	1	3	0	6	0	3	1

b) $x^2 + x + 1$ est divisible par 7 si, et seulement si, $x^2 + x + 1 \equiv 0\ (7)$.

Les solutions sont donc : $x \equiv 2\ (7)$ et $x \equiv 4\ (7)$

c) On a l'algorithme suivant :

Variables : X, Y entiers
Traitement et sorties
    pour X de 0 à 6 **faire**
        $X^2 + X + 1 \to Y$
        tant que $Y \geqslant 7$ **faire**
            $Y - 7 \to Y$
        fin
        si $Y = 0$ **alors**
            Afficher X
        fin
    fin

EXERCICE 4

Critère de divisibilité par 13 **(4 points)**

1) $M_{13} = \{0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$

2) Il faut montrer que : $10a + b \equiv 0\ (13) \quad \Leftrightarrow \quad a + 4b \equiv 0\ (13)$

- Dans le sens direct, en multipliant par 4 :

  $10a + b \equiv 0\ (13) \quad \Rightarrow \quad 40a + 4b \equiv 0\ (13)$ or $40 \equiv 1\ (13)$ car $40 = 13 \times 3 + 1$

  D'après la compatibilité de la congruence avec le produit, on a : $a + 4b \equiv 0\ (13)$

- Réciproquement, en multipliant par 10 :

  $a + 4b \equiv 0\ (13) \quad \Rightarrow \quad 10a + 40b \equiv 0\ (13)$ or $40 \equiv 1\ (13)$ car $40 = 13 \times 3 + 1$

  D'après la compatibilité de la congruence avec le produit, on a : $10a + b \equiv 0\ (13)$

3) Un nombre est divisible par 13 si, et seulement si, son nombre de dizaines augmenté de 4 fois le chiffre des unités est divisible par 13.

4) On a les décomposition suivantes :

67|4	$67 + 6 \times 4 = 67 + 24 = 91$	divisible par 13
94|3	$94 + 4 \times 3 = 94 + 12 = 10\|6$ $10 + 4 \times 6 = 10 + 24 = 34$	non divisible par 13
463|2	$463 + 4 \times 2 = 463 + 8 = 47\|1$ $47 + 4 \times 1 = 47 + 4 = 51$	non divisible par 13
15655|6	$15655 + 4 \times 6 = 15655 + 24 = 1567\|9$ $1567 + 4 \times 9 = 1567 + 36 = 160\|3$ $160 + 4 \times 3 = 160 + 12 = 17\|2$ $17 + 4 \times 2 = 17 + 8 = 25$	non divisible par 13