BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

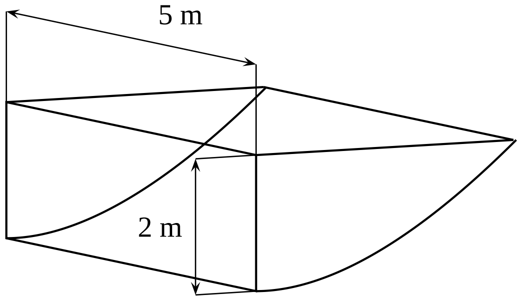
- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (6 points)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

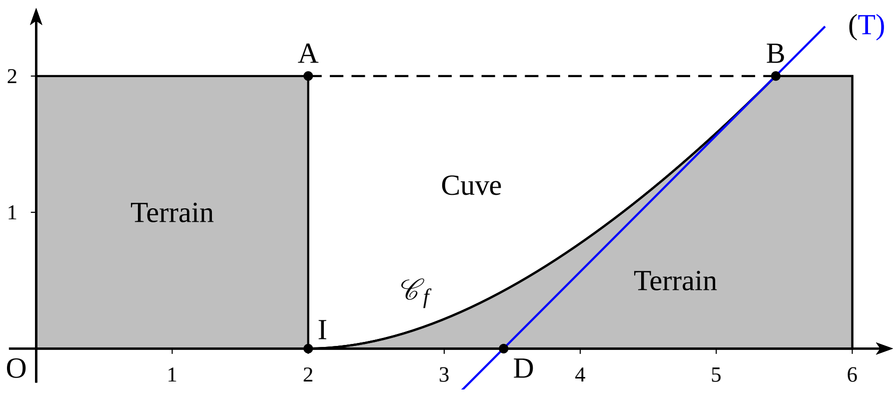
- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



Cette cuve est schématisée ci-contre.
La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[2\,;\ 2e]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2) On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses.

   a) Déterminer une équation de la droite (T) et en déduire les coordonnées de D.

   b) On appelle $\mathcal{S}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.
   $\mathcal{S}$ peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur $[2\,; 2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4}$

   est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

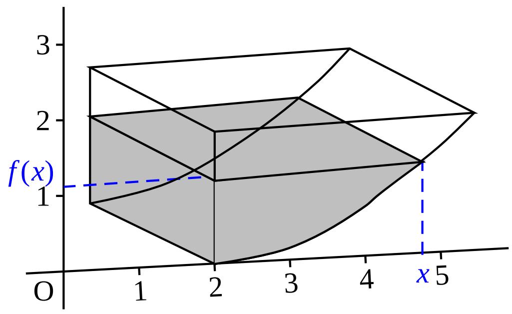
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,; 2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{S}$ et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;2e]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right]$$



1) Pourquoi l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 sur $[2\ ;\ 2e]$?
On admet que $x_0 \approx 4,311$, quel est alors le volume d'eau, au m^3 près, dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher. On précisera la méthode utilisée ainsi que la précision obtenue.

Variables : a, b réels
Entrées et initialisation
  a prend la valeur 2
  b prend la valeur $2e$
Traitement
  tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ **faire**
    c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
    si $v(c) < \dfrac{V}{2}$ **alors**
      a prend la valeur c
    sinon
      b prend la valeur c
    fin
  fin
Sorties : Afficher $f(c)$

EXERCICE 2 **(5 points)**

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 m et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans.
Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.

On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-4}.

1) a) La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20.
Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit ?

b) L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17.

Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit ?

c) Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. Quelle est alors la proportion des visiteurs vérifiant les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction ?

2) Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège. Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction.

En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction.

On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit.

On note A l'évènement « le visiteur a attendu plus de 30 min » et S l'évènement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

a) Montrer que la probabilité qu'un visiteur soit satisfait de l'attraction vaut 0,822 5.

b) Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. Quelle est la probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min ?

EXERCICE 3 **(4 points)**

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$.

On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1) Donner la forme algébrique de Z.

2) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3) Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4) En déduire que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5) On admet que : $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'objectif de cet exercice est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1) Soit M$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
   a) Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation
   $(E) : 2x + 3y = 11$.
   b) Justifier que le couple $(7\ ; -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.
   c) Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.
2) Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
   Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.
   a) Montrer que y est impair.
   b) Montrer que : $x \equiv 1\ \ [3]$ et que : $z \equiv 3\ \ [5]$.
   c) On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
   Montrer que le point $M(x\ ;\ y;\ z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.
   d) En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.