BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

1) On dérive comme $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$: $f'(x) = \dfrac{-3(-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \dfrac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ et $(1+e^{-2x})^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$, f est donc croissante sur $\mathbb{R}$

2) On calcule la limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0\end{array} \qquad \text{Par somme et quotient} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

donc la droite Δ : $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

3) La fonction f est continue (car dérivable) et monotone (croissante) sur $\mathbb{R}$.
De plus $2,999 \in f(\mathbb{R}) =]0\,;\,3[$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha) = 2,999$. On peut vérifier

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty\end{array} \qquad \text{Par somme et quotient} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Pour déterminer un encadrement de α avec le programme par dichotomie, on rentre la fonction $g(x) = f(x) - 2,999$ et l'on cherche quand la fonction g s'annule.
On peut calculer $g(0) = -1,499$ et $g(5) = 8,63 \times 10^{-4}$, donc $\alpha \in]0\,;\,5[$. On trouve alors :

$4,00 \leqslant \alpha \leqslant 4,01$ pour 9 itérations.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1) D'après la question précédente, $f(\mathbb{R}) =]0\,;\,3[$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 3 \Rightarrow 3 - f(x) > 0$

2) On simplifie h : $h(x) = 3 - \dfrac{3}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3 + 3e^{-2x} - 3}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

On dérive H comme $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$: $H'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = h(x)$

La fonction H est donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3) a) $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ représente :
l'aire entre la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ en u.a. entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$.

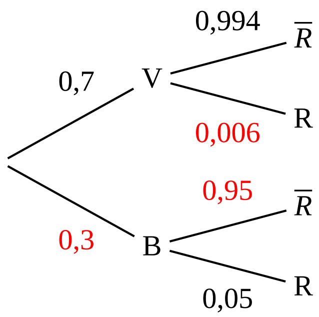
b) $$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2}\ln(1+e^{-2x}\right]_0^a = -\frac{3}{2}\ln(1+e^{-2a}) + \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\left(\ln 2 - \ln(1+e^{-2a})\right)$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$$

c) Il s'agit de l'aire entre Δ et la courbe $\mathscr{C}$ entre les abscisses 0 et 3, donc
$$\mathscr{A} = \int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\frac{2}{1+e^{-6}} \simeq 1,036$$

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1) On a : $P(V) = 0,7$ $P_V(\overline{R}) = 0,994$ et $P_B(R) = 0,05$, donc



2) $P(V \cap R) = P(V) \times P_V(R) = 0,7 \times 0,006 = 0{,}004\,2$

3) $P(R) = P(R \cap V) + P(R \cap B) = 0{,}004\,2 + 0,3 \times 0,05 = 0{,}004\,2 + 0{,}015 = 0{,}019\,2$

4) $P_R(B) = \dfrac{P(R \cap B)}{P(R)} = \dfrac{0,015}{0{,}019\,2} = 0{,}781\,25$

Partie B : le vélo

1) $P(15 \leqslant T \leqslant 20) = \text{normalFrép}(15, 20, 17, 1.2) = 0{,}946\,0$

2) $P(T > 20) = \text{normalFrép}(20, 1E99, 17, 1.2) = 0{,}006\,2$

3) On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que :
$P(T \leqslant T_0) = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = \text{normalFrac}(0.9, 17, 1.2) = 18{,}537\,9$

On peut revenir à la loi normale centrée réduite en posant $Z = \dfrac{T - 17}{1,2}$, on a alors :

$$P(T \leqslant T_0) = P\left(Z \leqslant \frac{T_0 - 17}{1,2}\right) = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_0 - 17}{1.2} = \Phi^{-1}(0,9) \quad \Leftrightarrow$$
$$T_0 = 1,2\Phi^{-1}(0,9) + 17 = 18{,}537\,9$$

L'élève doit partir 18, 54 minutes au maximum avant 8 h 00 pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9. Il devra partir au maximum à 7 h 41 à la minute près.

Partie C : le bus

1) Z' suit une loi normale centrée réduite.

2) On doit avoir $P(T' \geqslant 20) = 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad P(T' \leqslant 20) = 1 - 0,05 = 0,95$, on a alors :

$$P\left(Z' \leqslant \frac{20 - 15}{\sigma'}\right) = 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{\sigma'} = \Phi^{-1}(0,95) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma' = \frac{5}{\Phi^{-1}(0,95)} = 3,04$$

EXERCICE 3 (5 points)

1) **Affirmation 1 : Vraie**

On calcule v_{n+1} en fonction de v_n

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b - ab - b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = av_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = a$, la suite (v_n) est donc géométrique de raison a.

2) **Affirmation 2 : Fausse**

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. On a alors : $z - \bar{z} = 2iy$ l'équation devient alors :

$$2iy + 2 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -2 + 4i \quad \Leftrightarrow \quad y = -1 + 2i \text{ impossible car } y \in \mathbb{R}$$

3) **Affirmation 3 : vraie**

$$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \frac{7}{2}\ln e + \frac{9\ln e}{2\ln e} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$$

$$\frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln\frac{3}{4}}} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 6 \times \frac{4}{3} = 8$$

4) **Affirmation 4 : vraie**

$\dfrac{e^x}{e^x+2}$ est de la forme : $\dfrac{u'}{u} \longrightarrow \ln|u|$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \Big[\ln|e^x+2|\Big]_0^{\ln 3} = \Big[\ln(e^x+2)\Big]_0^{\ln 3} = \ln(e^{\ln 3}+2) - \ln(e^0+2) = \ln 5 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{5}{3} = -\ln\left(\frac{3}{5}\right) \quad \text{car } \ln\frac{1}{a} = -\ln a \text{ et } \frac{3}{5} \text{ est l'inverse de } \frac{5}{3}$$

5) **Affirmation 5 : fausse**

$$\text{Conditions : } \begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x>1 \quad \Leftrightarrow \quad D_f =]1\,;+\infty[$$

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$,

$$x \in D_f,\ \ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{x-1}{x+2} = \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} = 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$x - 1 = 4x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \notin D_f$$

Il n'y a aucune solution à l'équation.

EXERCICE 4 **(2 points)**

1) $P(X \leqslant 2) = 0,15 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-2\lambda} = 0,15 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\lambda} = 0,85 \quad \Leftrightarrow \quad -2\lambda = \ln 0,85 \quad \Leftrightarrow$

$$\lambda = -\frac{\ln 0,85}{2} \simeq 0,081$$

2) a) $$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{P(X \geqslant t \text{ et } X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h) \quad .$$

b) $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0,15 = 0,85$

c) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} = -\dfrac{2}{\ln 0,85} \simeq 12,3$

Le temps moyen de durée de vie de ce moteur est de 12,3 ans.

EXERCICE 5 (4 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) $\Delta = 16 - 64 = -48 = (4i\sqrt{3})^2$ donc $\Delta < 0$, l'équation a deux racines complexes conjugués :

$$Z_1 = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$$

Forme exponentielle de Z_1 : $|Z_1| = \sqrt{4 + 12} = 4$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$Z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $Z_2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (conjugué de Z_1)

2) $a^2 = \left(2\, e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 4\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} = Z_1$

Donc $z^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = a$ ou $z_2 = -a$

$z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = -z_1 = -1 - i\sqrt{3}$

3) z est une solution de l'équation (E) donc $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ en prenant le conjugué de l'égalité

$\overline{z^4 + 4z^2 + 16} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z^4} + \overline{4z^2} + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z}^4 + 4\bar{z}^2 + 16 = 0$

Donc si z est solution de (E) alors $\bar{z}$ est aussi solution de (E).

Les quatre solutions de (E) sont : $z_1, z_2, \overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$, soit :

$S = \left\{-1 - i\sqrt{3}\,;\ -1 + i\sqrt{3}\,;\ 1 - i\sqrt{3}\,;\ 1 + i\sqrt{3}\right\}$

EXERCICE 5 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) On exprime x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n pour interpréter le rôle des coefficients demandés.

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x_n + 0,15y_n + 1 \\ 0,2x_n + 0,4y_n + 3 \end{pmatrix}$$

Le coefficient 0,6 signifie que 60 % des fonds de l'agence X est conservé d'une année à l'autre.

Le coefficient 3 signifie que 3 millions d'euros sont transférés du siège vers l'agence Y chaque année.

2) $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, on a donc : $\mathbf{U_1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 + 1,5 + 1 \\ 10 + 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}$

L'agence X possède 32,5 millions d'euros et l'agence Y possède 17 millions d'euros en 2015.

3) a) En rentrant dans la calculatrice les matrice **P**, **D** et **Q**, on a : $\mathbf{PDQ} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$

Si on effectue le calcul, on a :

$$\mathbf{PDQ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 2,1 \\ -0,6 & 1,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,075 + 0,525 & -0,1125 + 0,2625 \\ -0,15 + 0,35 & 0,225 + 0,175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

b) $\mathbf{QP} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}25} & \mathbf{-0{,}375} \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{3} \\ -2 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

La coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne est égal à :
$0,25 \times 3 - 0,375 \times 2 = 0,75 - 0,75 = 0$

4) a) $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{AU}_n - \mathbf{B} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x_n + 0,15y_n + 1 - 5 \\ 0,2x_n + 0,4y_n + 3 - \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x_n + 0,15y_n - 4 \\ 0,2x_n + 0,4y_n - \frac{11}{3} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AV}_n = \mathbf{A}\left(\mathbf{U}_n - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - 5 \\ y_n - \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6(x_n - 5) + 0,15\left(y_n - \frac{20}{3}\right) \\ 0,2(x_n - 5) + 0,4\left(y_n - \frac{20}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6x_n - 1 + 0,15y_n - 1 \\ 0,2x_n - 1 + 0,4y_n - \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6x_n + 0,15y_n - 4 \\ 0,2x_n + 0,4y_n - \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc : $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{AV}_n$

b) $\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} 50 - 5 \\ 10 - \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

On a alors $\mathbf{V}_1 = \mathbf{AV}_0$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{AV}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{V}_0$, de proche en proche, on obtient $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{V}_0$

5) a) $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5\,(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

Le coefficient a_n de la première ligne est donc :

$$a_n = 45\,(0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n) + \frac{10}{3} \times 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n)$$
$$= 11,25 \times 0,3^n + 33,75 \times 0,7^n - 1,25 \times 0,3^n + 1,25 \times 0,7^n$$
$$= 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n$$

b) On a : $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$

On a donc : $x_n = a_n + 5 = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n + 5$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$ car $-1 < 0,3 < 0,7 < 1$

Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 5$

La quantité de fonds disponibles dans l'agence X va tendre vers 5 millions d'euros.