

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ **votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.

EXERCICE 1**(3 points)****Partie A : Restitution organisée de connaissance**

On rappelle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Montrer que la fonction g est positive sur $[1; +\infty[$.

2) a) Montrer que, pour tout x de $[1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.

c) On appelle (D) la droite d'équation $y = x$. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$. Que peut-on déduire des représentations \mathcal{C} et (D) ?

EXERCICE 2**(5 points)****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n , 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$ ».

Proposition 3 : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « il existe un seul couple $(a; b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{ppcm}(a, b) - \text{pgcd}(a, b) = 1$ ».

Proposition 5 : Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture \overline{abc} en base dix et N a pour écriture \overline{bca} en base dix. « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

EXERCICE 3**(7 points)**

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

Partie A : Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2) Étude du signe de la fonction f

a) Étudier le sens de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur \mathbb{R} , notée α .

- c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
- d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

Partie B : Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

- 1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
- 2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
- 3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

Partie C : Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- 2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
- 3) Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .
- 4) On donne l'algorithme suivant :

Variables

N, U, I, g (fonction)

Initialisation

Lire N

$0 \rightarrow U$

Traitement

Pour I de 1 à N faire

$g(U) \rightarrow U$

FinPour

Afficher U

Après avoir rentré la fonction g dans votre calculatrice ainsi que le programme ci-contre, recopier puis compléter le tableau suivant avec des valeurs arrondies à la **6^e décimale** :

N	2	3	4	5
U				

Que peut-on dire de l'efficacité de ce programme ?

EXERCICE 4

(5 points)

Le plan complexe \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique : 2 cm. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle f l'application du plan \mathcal{P} privé du point O dans \mathcal{P} qui, à tout point M différent de O , d'affixe z , associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

- 1) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par f d'affixes respectives a' et b' .
 - a) Calculer a' et b' .
 - b) Placer les points A, A', B et B' .
 - c) Démontrer que $\frac{-b}{b' - b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
 - d) En déduire la nature du triangle OBB' .
- 2) On recherche l'ensemble (E) des points du plan \mathcal{P} privé du point O qui ont pour image par f , le point O .

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z ,

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E). On donnera leurs écriture exponentielles.

c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ) .

3) Soit θ un réel.

a) Démontrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2 \sin \theta + 1)i$.

b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-i$.