

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER

EXERCICE 1A.1

On considère une variable aléatoire discrète X qui peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 7, dont voici la loi de probabilité :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
$p(X = x_i)$	0,223	0,335	0,251	0,126	0,047	0,014	0,003	0,001	1

Calculer :

- a. $p(X = 0) = 0,223$ b. $p(X = 5) = 0,014$ c. $p(X > 5) = p(X = 6) + p(X = 7) = 0,004$
d. $p(X \leq 1) = 0,558$ e. $p(X < 7) = 0,999$ f. $p(3 \leq X \leq 5) = 0,187$
g. $p(3 < X < 5) = 0,047$ h. $p(X \leq 7) = 1$ i. $p(X = 8) = 0$

EXERCICE 1A.2

On considère l'expérience suivante : on lance 10 fois successivement une pièce, et on appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'on obtient « FACE ».

Traduire chaque phrase par une expression du type $p(X = 2)$ ou $p(X \leq 1)$...

- a. La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « FACE » = $p(X = 4)$
b. La probabilité d'obtenir au moins 2 lancers « FACE » = $p(X \geq 2) = p(X > 1)$
c. La probabilité d'obtenir plus de 7 lancers « FACE » = $p(X > 7) = p(X \geq 8)$
d. La probabilité d'obtenir 3, 4 ou 5 lancers « FACE » = $p(3 \leq X \leq 5) = p(2 < X < 6)$
e. La probabilité d'obtenir moins de 3 lancers « FACE » = $p(X < 3) = p(X \leq 2)$
f. La probabilité d'obtenir au plus 5 lancers « FACE » = $p(X \leq 5) = p(X < 6)$
g. La probabilité d'obtenir au moins la moitié des lancers « FACE » = $p(X \geq 5) = p(X > 4)$
h. La probabilité d'obtenir plus de 1 lancer « FACE » = $p(X > 1) = p(X \geq 2)$
i. La probabilité d'obtenir 5 à 9 lancers « FACE » = $p(5 \leq X \leq 9) = p(4 < X < 10)$
j. La probabilité d'obtenir au plus 8 lancers « FACE » = $p(X \leq 8) = p(X < 9)$

EXERCICE 1A.3 On admet que la loi de probabilité de l'expérience de l'EXERCICE 1A.2 est la suivante :

Nombre de « FACE » : X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

Quelle est la probabilité d'obtenir...

- a. ... exactement 7 lancers « FACE » ? $p(X = 7) = 0,117$
b. ... au moins 8 lancers « FACE » ? $p(X \geq 8) = 0,044 + 0,010 + 0,001 = 0,055$
c. ... plus de 5 lancers « FACE » ? $p(X > 5) = 0,246 + 0,205 + 0,117 + 0,044 + 0,010 + 0,001 = 0,623$
d. ... moins de 2 lancers « FACE » ? $p(X < 2) = 0,001 + 0,010 = 0,011$
e. ... au moins 1 lancer « PILE » ? $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,001 = 0,999$

EXERCICE 1A.4

Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard trois boules simultanément, et on appelle X la variable aléatoire correspondant à la somme des numéros marqués sur ces boules.

a. Quelle sont les différentes valeurs que peut prendre X ?

Au minimum, les boules choisies sont la 1, la 2 et la 3 pour une somme de $X = 6$.

Au maximum, les boules choisies sont la 3, la 4 et la 5 pour une somme de $X = 12$.

b. Représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

Il serait volumineux de faire un arbre à trois branches avec autant de valeurs.

Identifions les différentes combinaisons :

Pour $X = 6$: $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

Pour $X = 7$: $(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)$

Pour $X = 8$: $(1, 2, 5), (1, 5, 2), (2, 1, 5), (2, 5, 1), (5, 1, 2), (5, 2, 1)$
 $(1, 3, 4), (1, 4, 3), (3, 1, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 3), (4, 3, 1)$

Pour $X = 9$: $(1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1)$
 $(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1)$
 $(2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)$

Pour $X = 10$: $(1, 3, 6), (1, 6, 3), (3, 1, 6), (3, 6, 1), (6, 1, 3), (6, 3, 1)$
 $(1, 4, 5), (1, 5, 4), (4, 1, 5), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (5, 4, 1)$
 $(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)$

Pour $X = 11$: $(1, 4, 6), (1, 6, 4), (4, 1, 6), (4, 6, 1), (6, 1, 4), (6, 4, 1)$
 $(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2)$
 $(2, 4, 5), (2, 5, 4), (4, 2, 5), (4, 5, 2), (5, 2, 4), (5, 4, 2)$

Pour $X = 12$: $(1, 5, 6), (1, 6, 5), (5, 1, 6), (5, 6, 1), (6, 1, 5), (6, 5, 1)$
 $(2, 4, 6), (2, 6, 4), (4, 2, 6), (4, 6, 2), (6, 2, 4), (6, 4, 2)$
 $(3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4), (5, 4, 3)$

Pour $X = 13$: $(2, 5, 6), (2, 6, 5), (5, 2, 6), (5, 6, 2), (6, 2, 5), (6, 5, 2)$
 $(3, 4, 6), (3, 6, 4), (4, 3, 6), (4, 6, 3), (6, 3, 4), (6, 4, 3)$

Pour $X = 14$: $(3, 5, 6), (3, 6, 5), (5, 3, 6), (5, 6, 3), (6, 3, 5), (6, 5, 3)$

Pour $X = 15$: $(4, 5, 6), (4, 6, 5), (5, 4, 6), (5, 6, 4), (6, 4, 5), (6, 5, 4)$

Il y a donc 120 combinaisons, d'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{6}{120}$

EXERCICE 1A.5

On lance deux dés à six faces et on appelle X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés.

a. Il serait volumineux de faire un arbre avec 36 branches secondaires.

Identifions les différentes combinaisons pour X variant de 2 à 12 :

Pour $X = 2$: $(1, 1)$

Pour $X = 3$: $(1, 2), (2, 1)$

Pour $X = 4$: $(1, 3), (3, 1), (2, 2)$

Pour $X = 5$: $(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$

Pour $X = 6$: $(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)$

Pour $X = 7$: $(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)$

Pour $X = 8$: $(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)$

Pour $X = 9$: $(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)$

Pour $X = 10$: $(4, 6), (6, 4), (5, 5)$

Pour $X = 11$: $(5, 6), (6, 5)$

Pour $X = 12$: $(6, 6)$

b. Il y a 36 combinaisons, ce qui donne la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$