ACTIVITÉ 1

1. Donner les quatre nombres suivants de la liste $\{0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots\}$.
2. On considère les suites définies de la manière suivante : on choisit un nombre entier u_0, chaque terme de la suite se construit ensuite en comptant le nombre d'apparitions des différents chiffres dans le terme précédent, les chiffres lus se classent ensuite dans l'ordre décroissant.
   a) La suite commence par le premier terme $u_0 = 0$, les termes suivants sont $u_1 = 10$, $u_2 = 1110$, $u_3 = 3110$, $u_4 = 132110$.
   Le nombre 132 110 se lit de la façon suivante : dans ce nombre, il y a un 3 un 2 trois 1 et un 0 par conséquent, le terme $u_5 = 13123110$.
   Calculer u_{11}.
   b) Donner les douze premiers termes de la suite qui commence par $u_0 = 40$.

ACTIVITÉ 2

Soit $a > 0$ un nombre réel. La suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ permet de déterminer une valeur approchée de la racine carrée du nombre réel positif a.

1. Valeur approchée de $\sqrt{2}$. Calculer les six premiers termes de la suite (u_n) avec $a = 2$.
2. L'algorithme suivant permet de calculer le nombre N de valeurs successives qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{A}$ avec une précision inférieure à 10^{-9} près.

$U \leftarrow A$
$N \leftarrow 0$
$B \leftarrow \sqrt{A}$
Tant que $\lvert U - B\rvert \geqslant 10^{-9}$
    $U \leftarrow \dfrac{1}{2} \times \left(U + \dfrac{U}{A}\right)$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

Programmer cet algorithme sur la calculatrice pour déterminer le nombre de valeurs successives qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{3}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{0{,}001}$.

ACTIVITÉ 3

Soit $k > 0$ un entier naturel. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = k$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{3u_n+1}{2} & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer les différents termes de la suite avec $k = 3$, $k = 7$, $k = 18$ et $k = 21$
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le plus petit indice n tel que $u_n = 1$ si $k = 27$.

$U \leftarrow 27$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U > 1$
    Si U pair
        Alors $U \leftarrow \dfrac{U}{2}$
        Sinon $U \leftarrow \dfrac{3U+1}{2}$
    Fin si
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

I SUITES PREMIÈRES DÉFINITIONS

1 DÉFINITION

Une suite réelle u est une fonction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; u_n est le terme d'indice n de la suite.

Dans la notation d'une suite, on peut préciser le rang à partir duquel la suite est définie.

— Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n on la note $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou plus simplement (u_n).
— Si la suite est définie à partir d'un certain rang k on la note $(u_n)_{n\geqslant k}$ le premier terme de la suite est u_k.

2 MODES DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE

Une suite peut être définie :

— de façon explicite en exprimant le terme général u_n en fonction de n à l'aide d'une formule.
On peut calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice n. Par exemple :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1} \text{ définit la suite } (u_n) = \left\{1,0,1,\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},1,\frac{3}{4},\cdots\right\}.$$

Le terme u_{24} est $u_{24} = \dfrac{24+(-1)^{24}}{24+1} = 1$

— par une formule de récurrence en exprimant un terme en fonction des termes qui le précèdent, et en donnant le(s) premier(s) terme(s).
Dans ce cas pour calculer le terme de rang n, il est nécessaire de calculer tous les termes qui le précèdent.
Par exemple :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = 3-2u_n \end{cases} \quad \text{définit la suite } (u_n) = \left\{\frac{1}{2},2,-1,5,-7,\cdots\right\}.$$

— par tout autre moyen, procédé aléatoire, algorithme etc. Par exemple, la suite des décimales de π.

3 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage de points $M(n;u_n)$

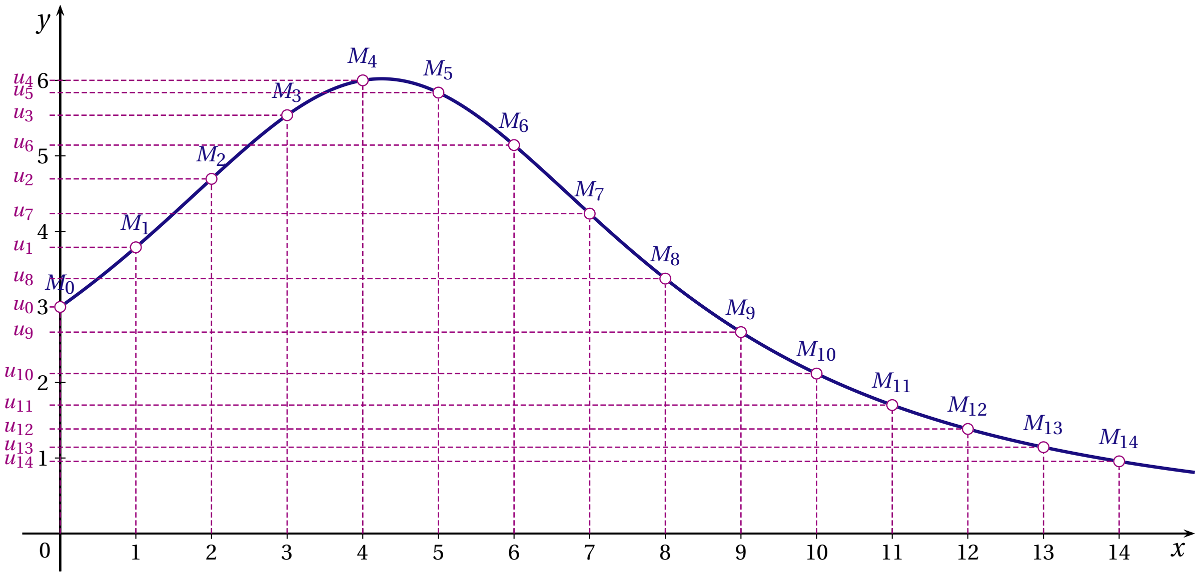
CAS D'UNE SUITE DÉFINIE DE FAÇON EXPLICITE

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{108}{n^2-8{,}5n+36}$.
Calculons les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
u_n	3	$\frac{72}{19}$	$\frac{108}{23}$	$\frac{72}{13}$	6	$\frac{216}{37}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{72}{17}$	$\cdots$

La représentation graphique de la suite (u_n) est l'ensemble des points $M_0\,(0;3)$, $M_1\left(1;\dfrac{72}{19}\right)$, $M_2\left(2;\dfrac{108}{23}\right)$ etc.
Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{108}{x^2-8{,}5x+36}$.

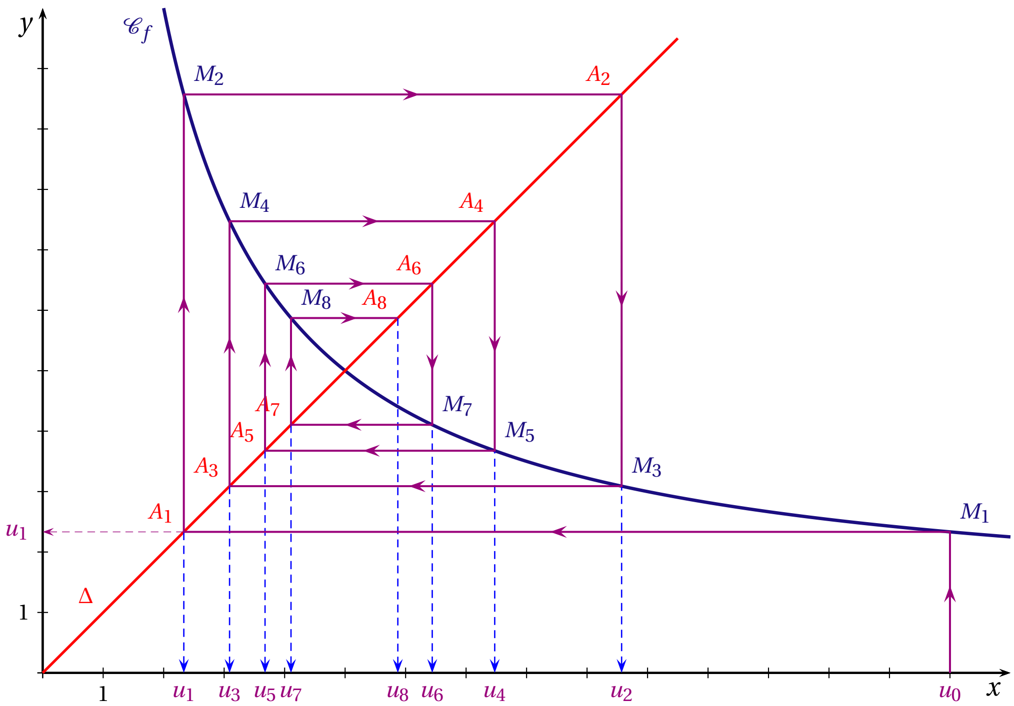


CAS D'UNE SUITE DÉFINIE PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE

Dans le cas d'une suite définie par une formule de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour u_0 donné, on représente les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{20}{u_n}$.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = 1 + \dfrac{20}{x}$



On place le terme initial u_0 sur l'axe des abscisses.
Comme $u_1 = 1 + \dfrac{20}{u_0}$, alors $u_1 = f(u_0)$. Ainsi, u_1 est l'ordonnée du point M_1 de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0.
On reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite Δ.
Le point A_1 de la droite Δ, de même ordonnée que le point M_1, a pour coordonnées $A_1(u_1; u_1)$.
On réitère le même procédé pour obtenir u_2 à partir de u_1 et successivement les termes suivants de la suite.

4 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Dire que la suite (u_n) est décroissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Dire que la suite (u_n) est croissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. Dire que la suite (u_n) est *constante* (ou *stationnaire*) signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

REMARQUES

— Dire que la suite (u_n) est *monotone* signifie que la suite est croissante ou décroissante.

— Comme pour les fonctions, lorsqu'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement décroissante, strictement croissante, strictement monotone.

ÉTUDE DE LA MONOTONIE D'UNE SUITE

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on peut en général :

— Comparer u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

— Lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\text{Si } u_n > 0 \text{ et } u_{n+1} > 0 \text{ alors : } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} - u_n > 0$$

— Lorsque la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n par une expression de la forme $u_n = f(n)$ alors, $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$.
Par conséquent, si la fonction f est monotone sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f.

EXEMPLES

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n + 1$.
   Nous avons $u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 + 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.
2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.
   La suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n,
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2 \times (n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}$$
   Ainsi, la suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donc la suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n^2 - n + 1}$.
   $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.
   La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie par $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$.
   Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante.
   On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

II SUITES ARITHMÉTIQUES

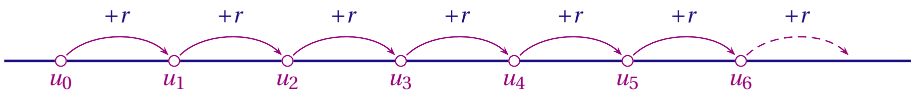
1 DÉFINITION

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

La raison d'une suite arithmétique est un réel indépendant de n.



Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

EXEMPLES

— La suite des nombres entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 1.
— La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 2.
— La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 2$ est une suite arithmétique de raison 3. En effet,

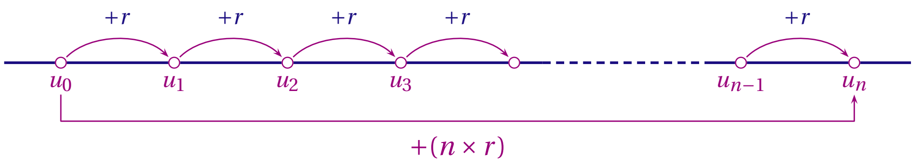
$$u_{n+1} = 3 \times (n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = u_n + 3$$

2 RELATIONS ENTRE LES TERMES

FORMULE EXPLICITE

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.

ILLUSTRATION



(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r \end{aligned}$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$$

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

DÉMONSTRATION

(u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - \left(u_0 + pr\right) = (n-p)r$$

REMARQUE

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et k, $u_{n+k} = u_n + kr$.
Il suffit de connaître la raison et un terme quelconque d'une suite arithmétique pour pouvoir déterminer tous les termes de la suite.

3 VARIATIONS

Le sens de variation d'une suite arithmétique ne dépend que de sa raison.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r,

— La suite (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.

— La suite (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.

— La suite (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

✳ DÉMONSTRATION

(u_n) une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$

— (u_n) est constante $\iff$ tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n = 0 \iff r = 0$.

— (u_n) est strictement croissante $\iff$ tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n > 0 \iff r > 0$.

— (u_n) est strictement décroissante $\iff$ tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n < 0 \iff r < 0$.

4 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

CAS PARTICULIER

Pour tout entier naturel n on a :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

✳ DÉMONSTRATION

On peut écrire la somme S des n premiers entiers naturels non nuls de deux manières :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

Par addition des deux lignes on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$$

CAS GÉNÉRAL

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

PREUVE

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$$\begin{aligned}
S &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\
&= (n+1)u_0 + (1 + 2 + \cdots + n) \times r \\
&= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r \\
&= (n+1)\left(\frac{2u_0 + nr}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)
\end{aligned}$$

III SUITES GÉOMÉTRIQUES

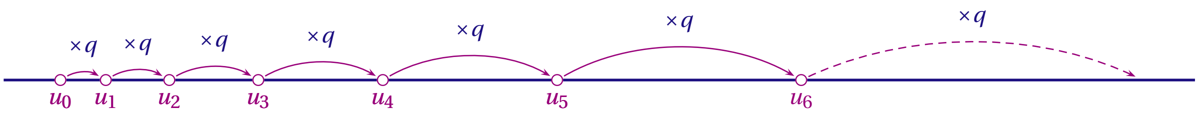
1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n.



Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

EXEMPLE

La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = -2 \times 3^n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 3.
En effet, $u_{n+1} = -2 \times 3^{n+1} = -2 \times 3^n \times 3 = 3 \times u_n$.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1 - \dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1{,}01 \times C_n$$

   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1{,}01$.

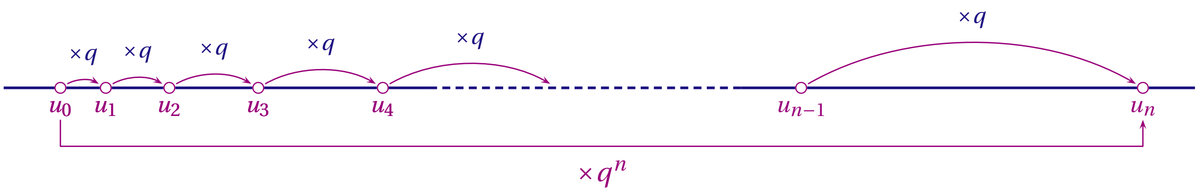
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2016, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2016+n$ d'où :
$$r_{n+1} = r_n \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}96 \times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 RELATIONS ENTRE LES TERMES

EXPRESSION EXPLICITE

Le terme général d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 \times q^n$.

ILLUSTRATION



(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :
$$u_1 = u_0 \times q$$
$$u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$$
$$u_3 = u_2 \times q = (u_0 + \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$$
On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :
$$u_n = u_{n-1} \times q = (u_0 \times q^{n-1}) \times q = u_0 \times q^n$$
Réciproquement, si la suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = a \times q^n$ où a et q sont des réels, alors pour tout entier n,
$$u_{n+1} = a \times q^{n+1} = a \times q^n \times q = u_n \times q$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel de l'exemple précédent, est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :
$$r_{10} = 50000 \times 0{,}96^{10} \approx 33242$$
Avec un réduction de 4 % par an, en 2026 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

✻ DÉMONSTRATION

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times q^p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$$

REMARQUE

Cette relation est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

EXEMPLE

(u_n) est une suite géométrique telle que $u_6 = 2$ et $u_9 = \dfrac{1}{4}$.
Pour déterminer la raison q de la suite (u_n) on utilise la relation :

$$u_9 = u_6 \times q^{9-6}$$

Soit q solution de l'équation

$$\frac{1}{4} = 2 \times q^3 \iff q^3 = \frac{1}{8} \iff q = \frac{1}{2}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

3 MONOTONIE

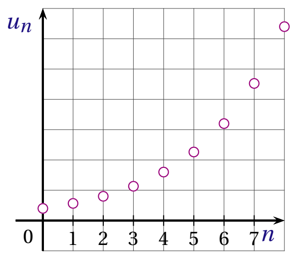
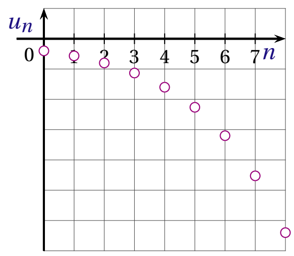
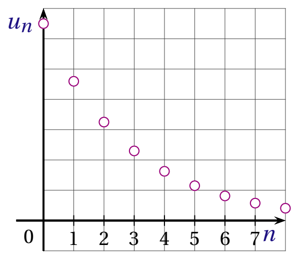
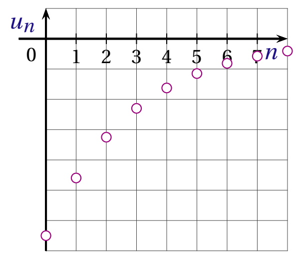
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite $\left(q^n\right)$ n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul
- Si $q<0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
- Si $q>0$ et $u_0>0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite $\left(q^n\right)$.
- Si $q>0$ et $u_0<0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite $\left(q^n\right)$.

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

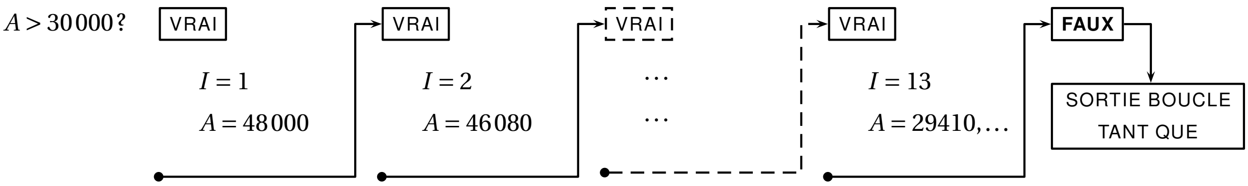
EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison $q=0{,}96$ et de premier terme $r_0=50\,000$
Comme $r_0>0$ et $0<0{,}96<1$ on en déduit, que la suite (r_n) est décroissante.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier I tel que pour tout entier $n \geqslant I$, $50\,000\times 0{,}96^n<30\,000$

$A \leftarrow 50\,000$
$I \leftarrow 0$
Tant que $A \geqslant 30\,000$
    $I \leftarrow I+1$
    $A \leftarrow 0{,}96\times A$
Fin Tant que

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 50000 → A	50000 → A ↲
: 0 → I	0 → I ↲
: While A ≥ 30000	While A ≥ 30000 ↲
: I + 1 → I	I + 1 → I ↲
: 0.96*A → A	0.96*A → A ↲
: End	WhileEnd ↲
: Disp I	I

Initialisation des variables A et I : $A=50\,000$ et $I=0$.
Traitement : Tant que la condition $A\geqslant 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "**TANT QUE**" et "**FIN TANT QUE**"



Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n\geqslant 13$, $50000\times 0{,}96^n \leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0=2\,000$
$1{,}015>1$ et $u_0>0$ donc la suite (u_n) est croissante.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur ou égal à 3 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n\geqslant N$, $2\,000\times 1{,}015^n \geqslant 3\,000$

$A \leftarrow 2\,000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A<3\,000$
    $A \leftarrow 1{,}015\times A$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 28.
Donc pour tout entier $n\geqslant 28$, $u_n \geqslant 3\,000$. Soit pour tout entier $n\geqslant 28$, $2000\times 1{,}015^n \geqslant 3\,000$.

4 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

SOMME DES PUISSANCES SUCCESSIVES

Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier naturel. La somme $1+q+q^2+\dots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

✻ DÉMONSTRATION

On pose $S = 1+q+q^2+\dots+q^n$, d'où $qS = q+q^2+q^3+\dots+q^{n+1}$

$S - qS = 1-q^{n+1}$ soit $(1-q)S = 1-q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on en déduit que $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

REMARQUE

Si $q=1$, $S = 1+1+1+\dots+1$. S est la somme de $n+1$ termes égaux à 1 d'où $S = n+1$.

SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0+u_1+u_2+\dots+u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

✻ DÉMONSTRATION

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 donc

$$\begin{aligned} u_0+u_1+u_2+\dots+u_n &= u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+\cdots u_0\times q^n \\ &= u_0 \times \left(1+q+q^2+\dots+q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$