Chapitre 8 – Variables aléatoires

I – Quelques rappels de probabilités

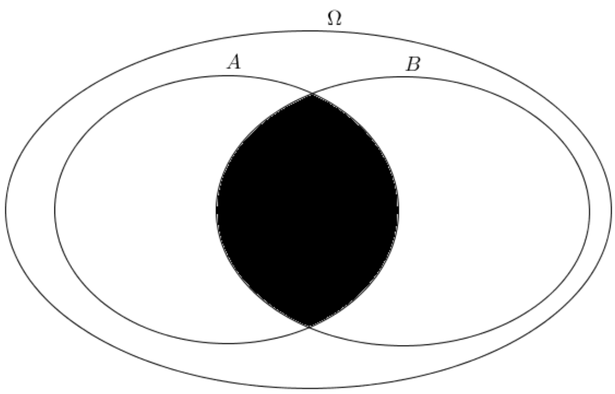
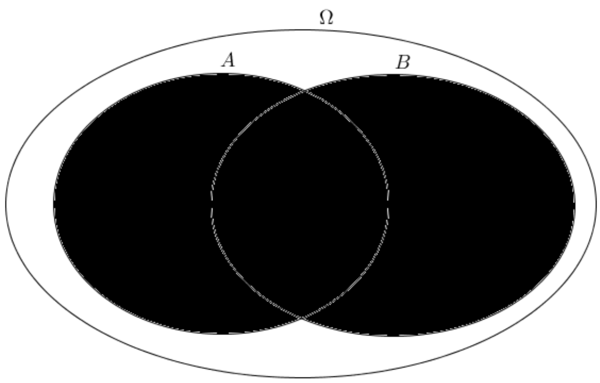
a) Évènements

On considère un univers Ω pour une expérience aléatoire. Un évènement A est une partie de Ω .

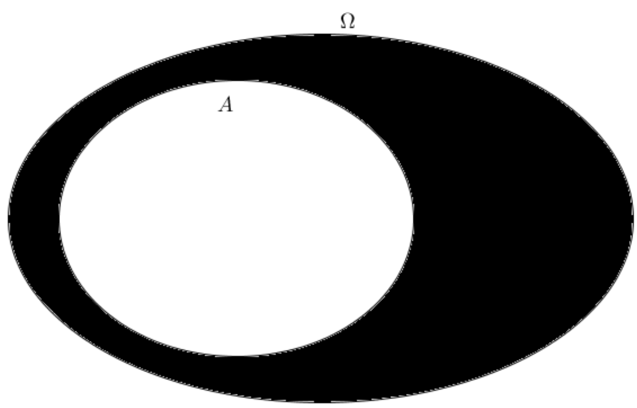
- Lorsqu'une issue ω appartient à un évènement A , on dit que ω réalise A ($\omega\in A$).
- $\emptyset$ est appelé évènement impossible, aucune issue ne le réalise.
- Ω est appelé évènement certain, toutes les issues le réalisent.

Soient A et B deux évènements.

- $A\cap B$ (« A inter B ») est l'évènement formé des issues qui réalisent *à la fois* A et B .
- $A\cup B$ (« A union B ») est l'évènement formé des issues qui réalisent *au moins* l'un des évènements A et B .

$A\cap B$	$A\cup B$
	

- Si aucune issue ne réalise A et B , c'est-à-dire si $A\cap B=\emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.
- $\overline{A}$ (« A barre ») est l'évènement contraire à l'évènement A . Il est formé des issues qui ne réalisent pas A .



- Pour tous évènements A et B , $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

b) Probabilités

On considère une loi de probabilité sur un univers Ω .

- La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On note cette probabilité $P(A)$.
  - $P(\emptyset)=0$
  - $P(\Omega)=1$
  - Pour tout évènement A , $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
  - Pour tout évènement A , $P(\overline{A})=1-P(A)$.
  - Pour tous évènements A et B , $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.
  - Pour tous évènements A et B , $P(\overline{A \cap B})=P(\overline{A} \cup \overline{B})$ et $P(\overline{A \cup B})=P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

II – Loi d'une variable aléatoire

a) Variable aléatoire

Définition : Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un nombre réel à chaque issue.

Notation : Soit $x \in \mathbb{R}$. L'évènement « X prend la valeur x » est noté $(X=x)$.

Exemple : *On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. On note les côtés apparus : P ou F . On a donc $\Omega=\{PP;PF;FP;FF\}$. Pour chacune de ces issues, on associe le nombre X de fois où pile apparaît. On a alors une variable aléatoire X sur Ω , cette variable prend les valeurs 0, 1 ou 2. On a $(X=0)=\{FF\}$, $(X=1)=\{PF;FP\}$, $(X=2)=\{PP\}$.*

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Théorème et définition : Une loi de probabilité est définie sur Ω . $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .
Lorsque l'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'évènement $(X=x_i)$, on définit une loi de probabilité sur $X(\Omega)$. Cette loi est la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exemple : *Pour X variable aléatoire égale au nombre de fois où pile apparaît pour deux lancés consécutifs d'une pièce de monnaie, on a : $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ et $P(X=2)=\frac{1}{4}$.*

c) Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire

Définitions : L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire correspondent respectivement à la moyenne, la variance et l'écart-type d'une série statistique, les probabilités jouant le rôle des fréquences.

Théorème : X est une variable aléatoire dont la loi est résumée par le tableau suivant.

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	p_1	p_2	...	p_n

Espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_1$

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$ ce qui équivaut à

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$$

Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemple : Pour X variable aléatoire égale au nombre de fois où pile apparaît pour deux lancers consécutifs d'une pièce de monnaie, on a : $E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

d) Loi de probabilité et distribution des fréquences

Après avoir retenu un modèle pour une expérience aléatoire, on peut simuler cette expérience. On obtient alors, après N simulations, une *série statistique* d'effectif N .
Il y a un lien entre les *fréquences* des issues obtenues et les *probabilités* de ces issues :

Loi des grands nombres : Pour une expérience donnée, les fréquences calculées à l'issue de N simulations se rapprochent des probabilités lorsque N devient grand.

Exemple : Toujours en considérant notre variable aléatoire X « nombre de fois où pile apparait pour deux lancers d'une pièce de monnaie », cela veut dire que lorsque l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience, la moyenne des valeurs de X va se rapprocher de l'espérance mathématique, c'est-à-dire 1 ici.