

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - Montpellier

EXERCICE 4B.1

Résoudre chaque inéquation à l'aide d'un tableau de signe :

a. Résoudre :

$$(2x + 7)(3x - 2) > 0$$

x	$-\infty$	$-7/2$	$2/3$	$+\infty$
$2x + 7$		-	-	+
$3x - 2$		-	+	+
$(2x + 7)(3x - 2)$		+	-	+

$$S = \left] -\infty; -\frac{7}{2} \right[\cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$$

b. Résoudre :

$$(-5x + 4)(7 - 3x) \leq 0$$

x	$-\infty$	$4/5$	$7/3$	$+\infty$
$-5x + 4$		+	-	-
$7 - 3x$		+	+	-
$(-5x + 4)(7 - 3x)$		+	-	+

$$S = \left[\frac{4}{5}; \frac{7}{3} \right]$$

c. Résoudre :

$$\frac{7 - 3x}{x + 9} \geq 0 \rightarrow x \neq -9$$

x	$-\infty$	-9	$7/3$	$+\infty$
$7 - 3x$		+	+	-
$x + 9$		-	+	+
$\frac{7 - 3x}{x + 9}$		-	+	-

$$S = \left] -9; \frac{7}{3} \right]$$

d. Résoudre :

$$(2x + 3)(-3x + 4)(5 - 4x) < 0$$

x	$-\infty$	$-3/2$	$5/4$	$4/3$	$+\infty$
$2x + 3$		-	+	+	+
$-3x + 4$		+	+	+	-
$5 - 4x$		+	+	-	-
P(x)		-	+	-	+

$$S = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[\cup \left] \frac{5}{4}; \frac{4}{3} \right[$$

e. Résoudre :

$$\frac{(-x + 5)(3x - 1)}{(3 + 2x)(-7x - 3)} \leq 0$$

$$\rightarrow x \neq -\frac{3}{7} \text{ et } x \neq -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-3/2$	$-3/7$	$1/3$	5	$+\infty$
$-x + 5$		+	+	+	+	-
$3x - 1$		-	-	-	+	+
$3 + 2x$		-	+	+	+	+
$-7x - 3$		+	+	-	-	-
Q(x)		+	-	+	-	+

$$S = \left] \frac{-3}{2}; \frac{-3}{7} \right[\cup \left[\frac{1}{3}; 5 \right]$$

EXERCICE 4B.2

On considère le polynôme $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 4x - 4$

a. Vérifier que (-2) est une racine de P(x) :

$$P(-2) = 6 \times (-2)^3 + 11 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) - 4 = 6 \times (-8) + 11 \times 4 + 8 - 4 = -48 + 44 + 8 - 4 = 0$$

b. En déduire que $P(x) = (x + 2) \times Q(x)$ où Q(x) est un polynôme du second degré que l'on déterminera :
-2 étant une racine de P(x), on peut factoriser P(x) par $(x - (-2))$, soit par $(x + 2)$

Pour trouver Q(x), deux méthodes :

- soit on pose $Q(x) = ax^2 + bx + c$ puis on développe $(ax^2 + bx + c)(x + 2)$ pour l'identifier avec P(x)

- soit on divise $6x^3 + 11x^2 - 4x - 4$ par $(x + 2) \rightarrow$ c'est le plus rapide :

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 11x^2 - 4x - 4 & x + 2 \\ -6x^3 - 12x^2 & 6x^2 - x - 2 \\ \hline -x^2 - 4x & \\ +x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 4 & \\ +2x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow Q(x) = 6x^2 - x - 2$$

c. Dresser le tableau de signe de $Q(x)$ puis en déduire celui de $P(x)$.

Discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 = 7^2 \rightarrow \Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-7}{2 \times 6} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+7}{2 \times 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$Q(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ donc :

$$Q(x) > 0 \text{ si } x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$$

$$Q(x) < 0 \text{ si } x \in]-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}[$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$Q(x)$		+	-	+

$$P(x) = (6x^2 - x - 2)(x + 2)$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$x + 2$		-	+	+	+
$Q(x)$		+	+	-	+
$P(x)$		-	+	-	+

d. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

$$S = \left[-2; \frac{-1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

EXERCICE 4B.3 On considère le polynôme $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 15x - 9$.

a. Vérifier que (-3) est une racine de $P(x)$:

$$P(-3) = 4 \times (-3)^3 + 8 \times (-3)^2 - 15 \times (-3) - 9 = 4 \times (-27) + 8 \times 9 + 45 - 9 = -108 + 72 + 45 - 9 = 0$$

b. En déduire que $P(x) = (x + 3) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré que l'on déterminera :
 -3 étant une racine de $P(x)$, on peut factoriser $P(x)$ par $(x - (-3))$, soit par $(x + 3)$

Pour trouver $Q(x)$, utilisons la deuxième méthode :

\rightarrow on pose $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ainsi $P(x) = (ax^2 + bx + c)(x + 3)$, soit :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c = ax^3 + (b + 3a)x^2 + (c + 3b)x + 3c$$

\rightarrow on identifie cette écriture avec l'expression connue de $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 15x - 9$.

$$\text{On obtient le système : } \begin{cases} a = 4 \\ b + 3a = 8 \\ c + 3b = -15 \\ 3c = -9 \end{cases} \rightarrow \text{a donne b qui donne c : } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 - 3a = 8 - 3 \times 4 = -4 \\ c = -15 - 3b = -15 - 3 \times (-4) = -3 \\ c = -\frac{9}{3} = -3 \end{cases}$$

Ainsi $Q(x) = 4x^2 - 4x - 3$

c. Dresser le tableau de signe de $Q(x)$ puis en déduire celui de $P(x)$:

Discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2 \rightarrow \Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-8}{2 \times 4} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+8}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$Q(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ donc :

$$Q(x) > 0 \text{ si } x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$$

$$Q(x) < 0 \text{ si } x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$3/2$	$+\infty$
$Q(x)$		+	-	+

$$P(x) = (4x^2 - 4x - 3)(x + 3)$$

x	$-\infty$	-3	$-1/2$	$3/2$	$+\infty$
$x + 2$	-	+	+	+	+
$Q(x)$	+	+	-	+	+
$P(x)$	-	+	-	+	+

d. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) > 0$.

$$S = \left] -3; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$$

EXERCICE 4B.4

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 27x + 18$.

a. Vérifier que $P(x) = A(x) \times B(x)$ où $A(x) = x^2 + x - 6$ et $B(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

b. Dresser les tableaux de signe de $A(x)$ et $B(x)$ puis en déduire le celui de $P(x)$.

c. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.

EXERCICE 4B.5

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 + x^3 - 47x^2 - 79x + 51$.

a. Vérifier que $\frac{1}{2}$ et (-3) sont des solutions de $P(x)$.

b. En déduire que $P(x) = (x - \frac{1}{2})(x + 3) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

c. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.