CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

RAPPEL : L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au pont d'abscisse x_0 est donnée par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, avec I = $\mathbb{R}$ et $x_0 = 3$

$f(3) = 2\times 3^2 - 6\times 3 + 4 = 2\times 9 - 18 + 4 = 18 - 18 + 4 = 4$

$f'(x) = 2\times 2x - 6 = 4x - 6$ → $f'(3) = 4\times 3 - 6 = 12 - 6 = 6$

Equation de la tangente : $y = f'(3)(x-3) + f(3) = 6\times(x-3) + 4 = 6x - 18 + 4 = 6x - 14$

2. $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$, avec I = $]-\infty;2[$ et $x_0 = 0$

$f(0) = \dfrac{4}{0-2} = \dfrac{4}{-2} = -2$

$f'(x) = 4\times\dfrac{-1}{(x-2)^2} = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$ → $f'(0) = \dfrac{-4}{(0-2)^2} = \dfrac{-4}{4} = -1$

Equation de la tangente : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -1\times(x-0) - 2 = -x - 2$

3. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 7x + 10$, avec I = $\mathbb{R}$ et $x_0 = 2$

$f(2) = 3\times 2^3 - 6\times 2^2 - 7\times 2 + 10 = 3\times 8 - 6\times 4 - 14 + 10 = 24 - 24 - 14 + 10 = -4$

$f'(x) = 3\times 3x^2 - 6\times 2x - 7 = 9x^2 - 12x - 7$ → $f'(2) = 9\times 2^2 - 12\times 2 - 7 = 9\times 4 - 24 - 7 = 36 - 24 - 7 = 5$

Equation de la tangente : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 5\times(x-2) - 4 = 5x - 10 - 4 = 5x - 14$

4. $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$, avec I = $]3;+\infty[$ et $x_0 = 4$

$f(4) = \dfrac{2}{4-3} = \dfrac{2}{1} = 2$

$f'(x) = 2\times\dfrac{-1}{(x-3)^2} = \dfrac{-2}{(x-3)^2}$ → $f'(4) = \dfrac{-2}{(4-3)^2} = \dfrac{-2}{1^2} = -2$

Equation de la tangente : $y = f'(4)(x-4) + f(4) = -2\times(x-4) + 2 = -2x + 8 + 2 = -2x + 10$

5. $f(x) = (2x+1)^2$, avec I = $\mathbb{R}$ et $x_0 = 3$

$f(3) = (2\times 3 + 1)^2 = 7^2 = 49$

$f'(x) = 2\times(2x+1)\times 2 = 4(2x+1)$ → $f'(3) = 4(2\times 3 + 1) = 4\times 7 = 28$

Equation de la tangente : $y = f'(3)(x-3) + f(3) = 28\times(x-3) + 49 = 28x - 84 + 49 = 28x - 35$

6. $f(x) = \dfrac{5x-2}{3x-4}$, avec I = $\left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ et $x_0 = 2$

$f(2) = \dfrac{5\times 2 - 2}{3\times 2 - 4} = \dfrac{10-2}{6-4} = \dfrac{8}{2} = 4$

$f'(x) = \dfrac{5\times(3x-4) - (5x-2)\times 3}{(3x-4)^2} = \dfrac{15x - 20 - 15x + 6}{(3x-4)^2} = \dfrac{-14}{(3x-4)^2}$ → $f'(2) = \dfrac{-14}{(3\times 2 - 4)^2} = \dfrac{-14}{2^2} = -\dfrac{7}{2}$

Equation de la tangente : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -\dfrac{7}{2}\times(x-2) + 4 = -\dfrac{7}{2}x + 7 + 4 = -\dfrac{7}{2}x + 11$

7. $f(x)=\sqrt{x}$, avec I = $]-4;+\infty[$ et $x_0 = 4$

$f(4)=\sqrt{4}=2$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ → $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2\times2}=\dfrac{1}{4}$

Equation de la tangente : $y=f'(4)(x-4)+f(4)=\dfrac{1}{4}\times(x-4)+2=\dfrac{1}{4}x-1+2=\dfrac{1}{4}x+1$

8. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$, avec I = $\mathbb{R}$ et $x_0 = 0$

$f(0)=\dfrac{1}{0^2+2\times0+2}=\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=\dfrac{-(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\dfrac{-2x-2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$ → $f'(0)=\dfrac{-2\times0-2}{\left(0^2+2\times0+2\right)^2}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Equation de la tangente : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\dfrac{1}{2}\times(x-0)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

9. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, avec I = $\mathbb{R}$ et $x_0 = 1$

$f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=\dfrac{1\times\left(x^2+1\right)-x\times2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ → $f'(1)=\dfrac{1-1^2}{\left(1^2+1\right)^2}=\dfrac{0}{4}=0$

Equation de la tangente : $y=f'(1)(x-1)+f(1)=0\times(x-1)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

10. $f(x)=3\sqrt{x}-1$, avec I = $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $x_0 = 9$

$f(9)=3\sqrt{9}-1=3\times3-1=8$

$f'(x)=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ → $f'(9)=\dfrac{3}{2\sqrt{9}}=\dfrac{3}{2\times3}=\dfrac{1}{2}$

Equation de la tangente : $y=f'(9)(x-9)+f(9)=\dfrac{1}{2}\times(x-9)+8=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{9}{2}+\dfrac{16}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$