

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Equation de la tangente au point d'abscisse $x = a$: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.

1) Calculer $f(2) = 2^2 + 2 - 3 = 4 + 2 - 3 = 3$ d'où le point $A(2;3)$

2) Calculer $f'(2)$ de deux façons différentes :

Première méthode :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 + (2+h) - 3] - (2^2 + 2 - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 2 + h - 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(5+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5 + h = 5 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x^2 + x - 3] - (2^2 + 2 - 3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 3 - 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x-2}$$

Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$\Delta > 0$: deux racines : $x_1 = \frac{-1-5}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-1+5}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$

Ainsi $x^2 + x - 6 = 1 \times (x+3)(x-2)$

Donc : $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x+3 = 5$

3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T: y = f'(2)(x-2) + f(2) = 5(x-2) + 3 = 5x - 10 + 3 = 5x - 7$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.

1) Calculer $f(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$ d'où le point $A\left(2; \frac{5}{2}\right)$

2) Soit un point $M(x; y)$ appartenant à C_f .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{\frac{1}{x} + x - \frac{5}{2}}{x-2} = \frac{\frac{1 \times 2}{x \times 2} + \frac{x \times 2x}{1 \times 2x} - \frac{5 \times x}{2 \times x}}{x-2} = \frac{\frac{2}{2x} + \frac{2x^2}{2x} - \frac{5x}{2x}}{x-2} = \frac{\frac{2x^2 - 5x + 2}{2x}}{x-2} \\ &= \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x(x-2)} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x} \times \frac{1}{x-2} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x(x-2)} \end{aligned}$$

Discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$$\text{Racines : } x_1 = \frac{5-3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5+3}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Donc } a = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x(x-2)} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2x} = \frac{x - \frac{1}{2}}{x}$$

Par passage à la limite, on obtient le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse : $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = f'(2)$$

3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T: y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{3}{4}(x-2) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{2}{2} = \frac{3}{4}x + 1$$