

I NOMBRE DÉRIVÉ

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et a un réel appartenant à I .

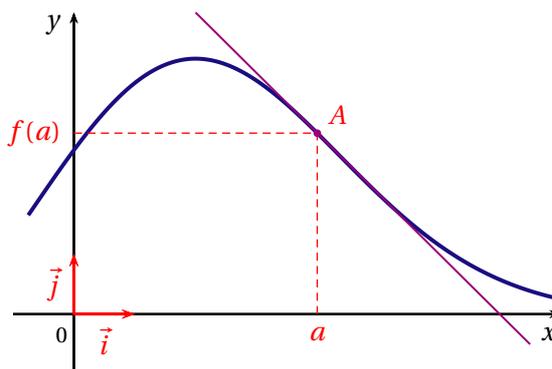
Lorsque le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite réelle quand x tend vers a en restant dans I , on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a . On note alors :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2 TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a .



PROPRIÉTÉ

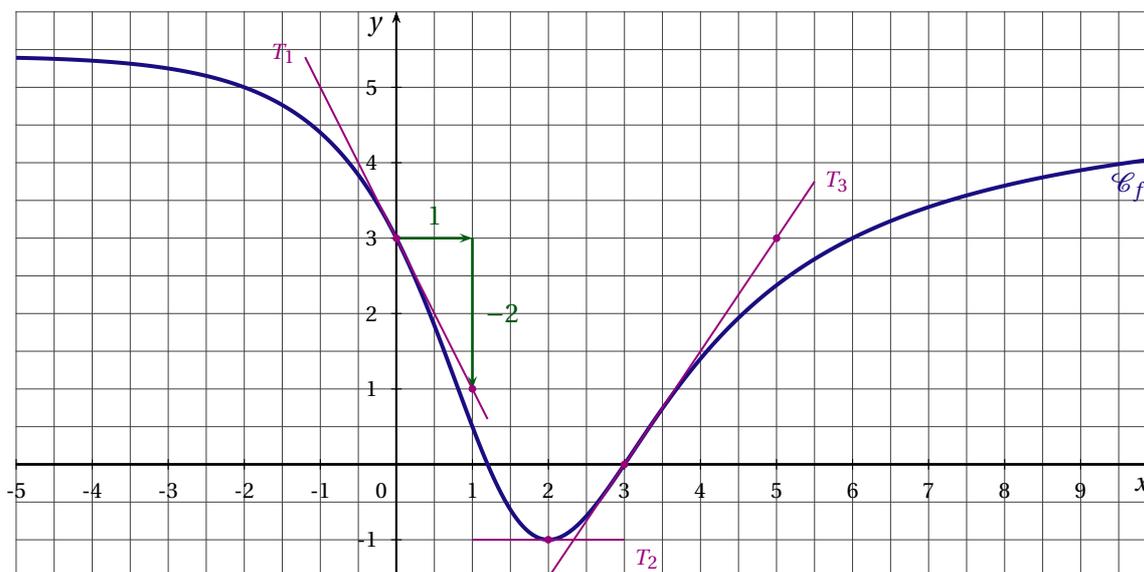
Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

EXEMPLE

La courbe \mathcal{C}_f tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

Par lecture graphique, le coefficient directeur de la droite T_1 est égal à -2 . Ainsi, $f'(0) = -2$

2. La tangente T_2 à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $f'(2) = 0$

3. La droite T_3 , tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées (3;0) et (5;3). Son coefficient directeur a est

$$a = \frac{3-0}{5-3} = \frac{3}{2}$$

Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse

3. Donc $f'(3) = \frac{3}{2}$

REMARQUE

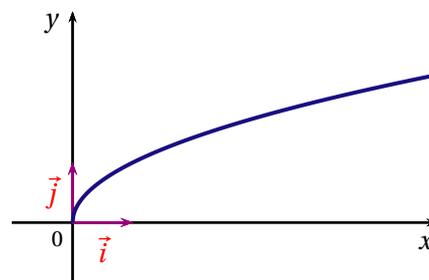
La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une tangente en un point a sans que la fonction soit dérivable en a .

La courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation $x = 0$ en 0.

Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 en effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ce n'est pas une limite finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



II FONCTION DÉRIVÉE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Lorsque pour tout réel x appartenant à I , f est dérivable en x , on dit que f est dérivable sur I .

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur l'intervalle I . Elle est notée f' .

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
\mathbb{R}	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
\mathbb{R}	$f(x) = ax + b$	a
\mathbb{R}	$f(x) = x^n$ (n entier $n \geq 1$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier $n \geq 1$)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$] 0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	ku'
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit	$u \times v$	$u'v + uv'$
Quotient ($v \neq 0$ sur I)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Inverse ($v \neq 0$ sur I)	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$

EXEMPLES

1. Produit de deux fonctions

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(2 + \frac{x^2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

Sur $]0; +\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$ d'où $f' = u'v + uv'$. Avec pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 + \frac{x^2}{3} & \text{d'où} & \quad u'(x) = \frac{2x}{3} \\ v(x) &= 1 - \frac{2}{x} & \text{d'où} & \quad v'(x) = \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

Soit pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{3} \times \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \times \left(2 + \frac{x^2}{3}\right) \\ &= \frac{2x}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 + 6}{3x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f'(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 6}{3x^2}$.

2. Quotient de deux fonctions

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$. Calculer $f'(x)$.

Sur \mathbb{R} , f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f = \frac{u}{v}$ d'où $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x - 3 & \text{d'où} & \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2 + 1 & \text{d'où} & \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2 + 1) - 2x(4x - 3)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 4 - 8x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$.

III DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

1 THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si f est constante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

2 THÉORÈME 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et f' la dérivée de f sur I .

- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

3 THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et x_0 un réel appartenant à I .

1. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

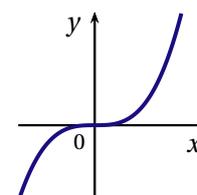
REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction cube définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 3x^2$.

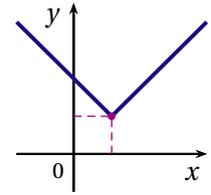
$f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et n'admet pas d'extremum en 0.



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x - 1| + 1$.
 f est une fonction affine par morceaux, f admet un minimum $f(1) = 1$ or f n'est pas dérivable en 1.



POINT MÉTHODE

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition \mathcal{D}_f :

- on détermine la dérivée f' de f ;
- on étudie le signe de f' sur \mathcal{D}_f ;
- on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de \mathcal{D}_f où le signe de f' est constant ;
- on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.