Devoir Surveillé n°4 Correction

Première ES

Bilan

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 20 points

Exercice 1. QCM — 5 points

QCM A

1. **Question 1** : **1.a.** : 40 euros
2. **Question 2** : **2.b.** : $]-\infty\,;\,-1[\cup]3\,;\,+\infty[$
3. **Question 3** : **3.a.** : $f'(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2}$
4. **Question 4** : **4.a.** : $y=\dfrac{3}{2}x+2$
5. **Question 5** : **5.b.** : $91,9005$

QCM B

1. **Question 1** : **1.a.** : $]-1\,;\,3[$
2. **Question 2** : **2.a.** : $f'(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2}$
3. **Question 3** : **3.a.** : $y=\dfrac{3}{2}x+2$
4. **Question 4** : **4.b.** : $91,9005$
5. **Question 5** : **5.a.** : 40 euros

Exercice 2. D'après Bac ES 2014 - Antilles-Guyane — 7 points

Pour tout entier naturel n, le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013+n$:

$$\begin{cases} u_0 &= 20 \\ u_{n+1} &= 0,92u_n+3. \end{cases}$$

Partie A — 5 points

1. En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}, c'est à dire au milliers d'abonnés.

1. a. [0.5 point] Déterminer les trois premiers termes, u_0, u_1 et u_2 et le nombre d'abonnés en 2014 et 2015.

$$\begin{cases} u_0 &= 20 \\ u_1 &= 0,92\,u_0+3=21,4 \\ u_2 &= 0,92\,u_1+3=22,688 \end{cases}$$

Donc **le nombre d'abonnés en 2014 est de 21,4 millions et en 2015 de 22,688 millions**.

1. b. [1 point] La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

Arithmétique ?

- $u_1-u_0=1.4\,;$
- $u_2-u_1=1.288\neq u_1-u_0$.

Les variations absolues sont différentes donc la suite u n'est pas arithmétique.

Géométrique ?

- $\dfrac{u_1}{u_0}=1,07\,;$
- $\dfrac{u_2}{u_1}\approx 1,060187\neq\dfrac{u_1}{u_0}$.

Les rapports sont différents donc la suite u n'est pas géométrique.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n-37,5$ pour tout entier naturel n.
[2 points] Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 37,5 \\ &= 0,92u_n + 3 - 37,5 \\ &= 0,92u_n - 34,5 \\ &= 0,92\left(u_n - \frac{34,5}{0,92}\right) \\ &= 0,92\,(u_n - 37,5) \\ v_{n+1} &= 0,92v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,92$,**
et de premier terme $v_0 = u_0 - 37,5 = -17,5$.

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -17,5 \\ v_{n+1} & = 0,92w_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. **[1 point] Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.**
On peut donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ w_n = -17,5\,(0,92)^n}$$

De l'égalité $v_n = u_n - 37,5$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + 37,5$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5}$$

4. **[0.5 point] Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.**
En 2020 cela correspond à $n = 7$ donc $u_7 \approx 27,738$.
L'opérateur aura donc en 2020 environ **27,738 millions d'abonnés**.

Partie B — 2 point

1. **[1 point]** Compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices. **Ne recopier sur votre copie que les deux instructions manquantes**.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20
	Affecter à N la valeur 0
	Tant que $\boxed{U \leq 25}$
	affecter à U la valeur $0,92 \times U + 3$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\boxed{N}$

2. **[1 point] A l'aide de la calculatrice, établir en quelle année l'opérateur fera des bénéfices pour la première fois ?**
On constate que :

En 2017	:	u_4	$\approx$	$24,963 < 25$	(millions d'abonnés)
En 2018	:	u_5	$\approx$	$25,966 > 25$	(millions d'abonnés)

C'est donc à **partir de 2018 que l'opérateur fera des bénéfices.**

Exercice 3. D'après Bac ES 2014 : Polynésie 4.5 points

Partie A 2 points

1. [0.5 point] Quel est le coût total de production pour 450 objets ?
Le coût de production pour 450 objets est de **24 000** euros.

2. [0.5 point] Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ?
On produit environ **640 objets** pour un coût total de 60 000 euros.

On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

3. [1 point] Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.

- Le coût marginal pour une production de 450 objets, soit 4,5 centaines d'objets, est donné par le nombre dérivé $C'(4,5)$. Il correspond donc au coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4,5.
Par lecture graphique, $C'(4,5) = 0$ car la tangente est horizontale en ce point.
Le coût marginal pour une production de 450 objets est donc de 0 centaine d'euro soit 0 euro.
- De même pour 600 objets, le coût marginal est donné par le nombre dérivé $C'(6)$. Il correspond donc au coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6.
Par lecture graphique :
$$C'(6) = \frac{600 - 100}{7 - 5} = 250$$
Le coût marginal pour une production de 600 objets est donc de 250 centaines d'euros soit 25 000 euro

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

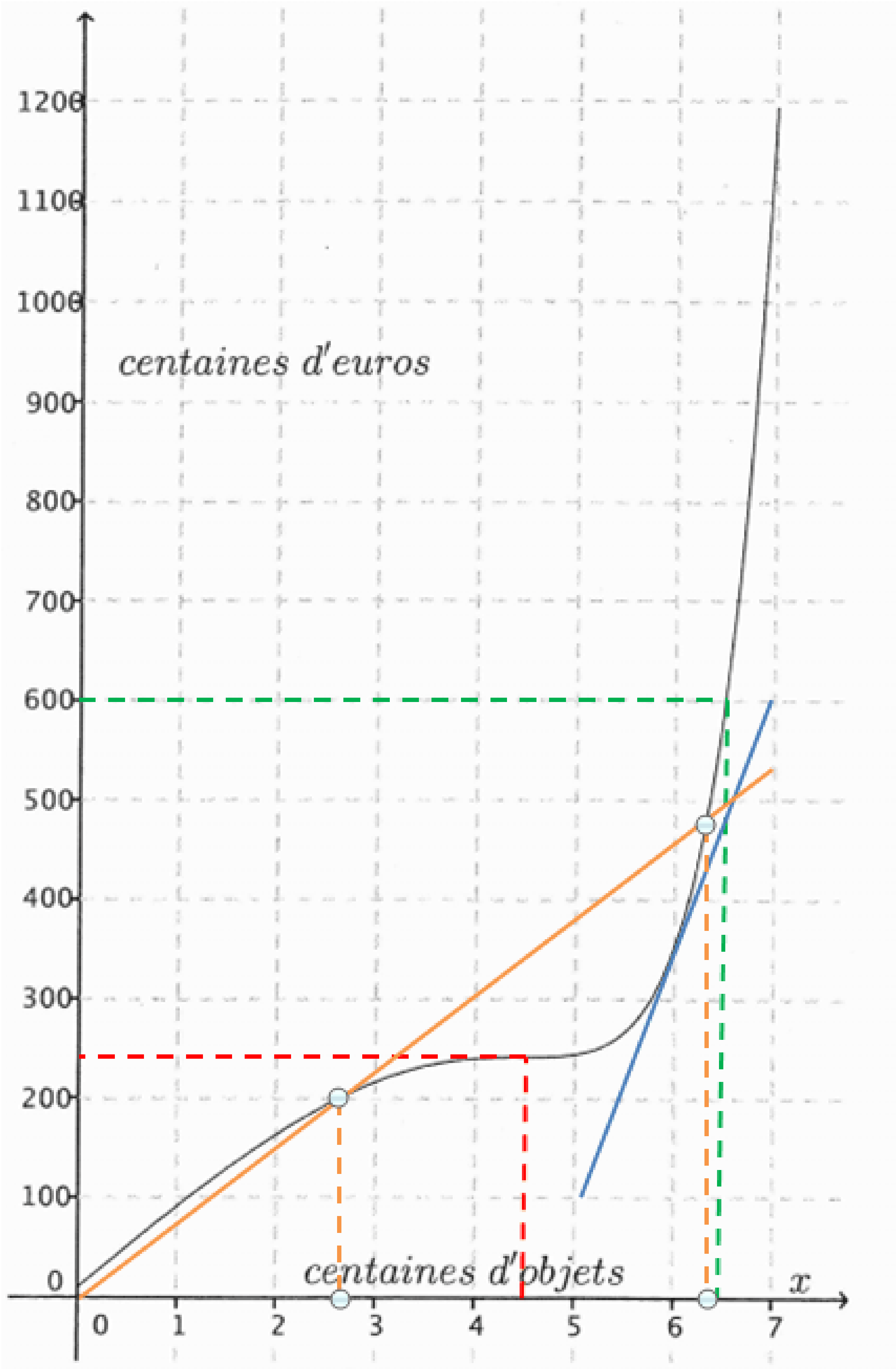
1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle [0 ; 7], $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets. Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.
La fonction recette est la fonction linéaire, définie sur l'intervalle [0 ; 7] définie par :

$$\boxed{r : \begin{cases} [0\,;\,7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & r(x) = 75x \end{cases}}$$

2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

2. a. En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.
On cherche les valeurs de x pour lesquelles la droite se trouve au-dessus de la courbe avec un écart maximal. Le bénéfice est positif et l'entreprise rentable **entre 280 et 620 objets**. Le bénéfice est maximal pour une production d'environ 550 objet. Cela correspond à la valeur de $x = 5,5$ pour laquelle l'écart entre les deux courbes est le plus grand dans cet intervalle de rentabilité.

2. b. Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?
L'écart entre la droite et la courbe est plus important pour 500 objets que pour 600 objets. Il est donc préférable de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets.


1200
1100
1000
centaines d'euros
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
centaines d'objets
x
0
1
2
3
4
5
6
7

Exercice 4. D'après Bac Polynésie, Juin 2014 3.5 points

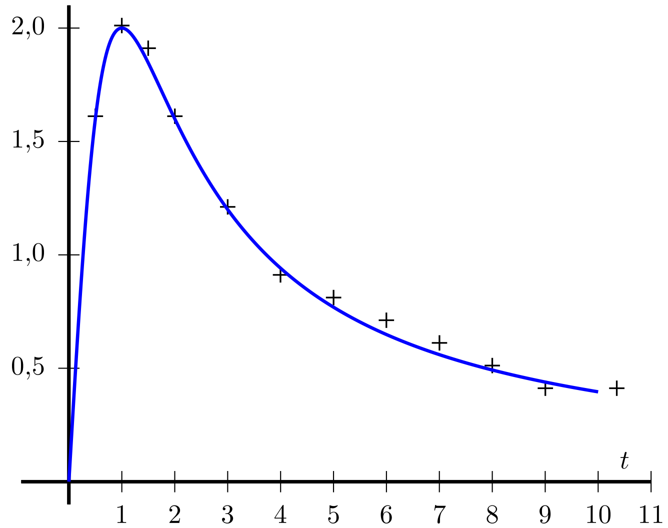
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}.$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.
Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :

1. a. les variations de la fonction g sur [0 ; 10] ;
La fonction semble être croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ 10]$.

1. b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
La concentration maximale est de **2 mg/l**.

1. c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.
La concentration semble être supérieure à 1,2 mg/l sur $\mathbf{[0,4\ ;\ 3]}$

2.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle [0 ; 10] et sa dérivée est g'. Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$.

La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ 10]$ et de la forme $\dfrac{u}{v}$:

$$g(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \text{ avec } \begin{cases} u(t) = 4t & ;\quad u'(t) = 4 \\ v(t) = t^2+1 & ;\quad v'(t) = 2t \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0\ ;\ 10],\quad g'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2}$$
$$g'(t) = \frac{4\left(t^2+1\right) - 4t\ 2t}{(t^2+1)^2}$$
$$g'(t) = \frac{4\ \left(t^2+1-2t^2\right)}{(t^2+1)^2}$$

$$\boxed{\forall t \in [0\ ;\ 10],\quad g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}}$$

2. b. [1 point] Les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ ayant une tangente horizontale sont les solutions sur l'intervalle [0 ; 10] de l'équation $g'(t) = 0$.

$$g'(t) = 0 \iff \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2} = 0 \iff 4\left(1-t^2\right) = 0 \iff 1-t^2 = 0 \iff t^2 = 1$$

Cette équation admet trivialement deux solutions réelles qui sont 1 et -1. Or seule la solution $t = 1$ appartient à l'intervalle [0 ; 10], de ce fait, le point $A(1\ ;\ 2)$ **est la seul point de $\mathscr{C}_g$ ayant une tangente horizontale**.