Devoir Surveillé n°4 Correction

Terminale ES/L

Premier Bilan

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. Les Suites — 6 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n):\begin{cases} a_0 & = 50 \\ a_{n+1} & = 0{,}4 \times a_n + 15 \end{cases} \qquad (b_n):\begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 25 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (b_n) est géométrique. En déduire son terme général.

Pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= -a_{n+1} + 25 \\
b_{n+1} &= -(0{,}4\ a_n + 15) + 25 \\
b_{n+1} &= -0{,}4 \times a_n + 10 \\
b_{n+1} &= 0{,}4 \times \left(-a_n + \frac{10}{0{,}4}\right) \\
b_{n+1} &= 0{,}4 \times (-a_n + 25) \\
b_{n+1} &= 0{,}4 \times b_n
\end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}4$, et de premier terme $b_0 = -25$ puisque :

$$\begin{aligned}
b_0 &= -a_0 + 25 \\
b_0 &= -50 + 25 \\
b_0 &= -25
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n):\begin{cases} b_0 & = -25 \\ b_{n+1} & = 0{,}4 \times b_n \end{cases} \ ;\ \forall n \geq 0}$$

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}4$, et de premier terme $b_0 = -25$ donc son terme général est

$$\forall n \geq 0\ ;\ b_n = b_0 \times (q)^{n-0}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geq 0\ ;\ b_n = -25 \times (0{,}4)^{n-0}}$$

2. Démontrer que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n = 25 \times (0{,}4)^n + 25}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geq 0$:

$$b_n = -a_n + 25$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = -b_n + 25$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geq 0\ ;\ a_n = 25 \times (0{,}4)^{n-0} + 25}$$

3. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Puisque $-1 < q = 0,4 < 1$ alors par théorème on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$$

De ce fait par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} 25\times 0,4^n = 0$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} 25\times 0,4^n + 25 = 25$$

Et donc la limite de la suite (a_n) est 25.

4. Déterminer avec la calculatrice le plus petit entier n tel que : $a_n < 25,004$.

n	a_n	Test : $a_n < 25,004$
9	25.0065536	FAUX
10	25.00262144	VRAI

5. Compléter sur cette feuille les lignes incomplètes de cet algorithme afin réponde à la question précédente (4.).

A compléter sur cette feuille

Pseudo Code

```
Fonction seuil()
    a ← 50
    n ← 0
    Tant que a ≥ 25,004
        n ← n + 1
        a ← 0,4 × a + 15
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

Exercice 2. Probabilités 5 points

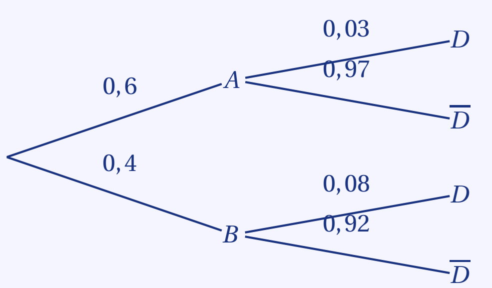
Une entreprise fabrique un article dans deux unités de production notées A et B. L'unité A, assure 60% de la production. On a constaté que :

- 3% des pièces provenant de l'unité A présentent un défaut de fabrication ;
- 8% des pièces provenant de l'unité B présentent un défaut de fabrication.

On prélève un article au hasard, et on note :

- A l'évènement « la pièce provient de l'unité A » ;
- B l'évènement « la pièce provient de l'unité B » ;
- D l'évènement « la pièce présente un défaut », $\overline{D}$ l'évènement contraire.

A compléter sur cette feuille



1.

1. a. Compléter l'arbre suivant sur cette feuille.

1. b. Calculer la probabilité qu'un article présente un défaut et provienne de l'unité A.

On cherche $p(A\cap D)$ soit :

$$p(A\cap D) = p(A)\times p_A(D) = 0,6\times 0,003 = \underline{0,0018}$$

La probabilité qu'un article présente un défaut et provienne de l'unité A est 0,0018.

1. c. Montrer que la probabilité qu'un article présente un défaut est égale à 0 ,05.
Les évènements A et B formant une partition de l'univers, on a d'apr la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) \\
P(D) &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) \\
P(D) &= 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 \\
P(D) &= 0{,}018 + 0{,}032 \\
P(D) &= \underline{0{,}05}
\end{aligned}$$

2. *On prélève au hasard 50 articles parmi tous ceux produits. Le nombre d'articles est suffisamment grand pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.*
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'articles présentant un défaut.

2. a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Modélisation
Il y a répétition de $n = 50$ événements indépendants et identiques (on tire un article).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,05$ quand un article a un défaut ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0{,}95$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 50$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,05$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 50$ et $p = 0,05$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(50\ ;\ 0,05\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(50\ ;\ 0,05\right).$$

2. b. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 4 articles présentant un défaut.
On donnera une valeur arrondie au dix millième.
Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,05$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{50}{k} \times 0,05^k \times (0{,}95)^{50-k}$$

La probabilité qu'au moins 4 articles présentent un défaut se traduit par $p(X \geq 4)$ or :

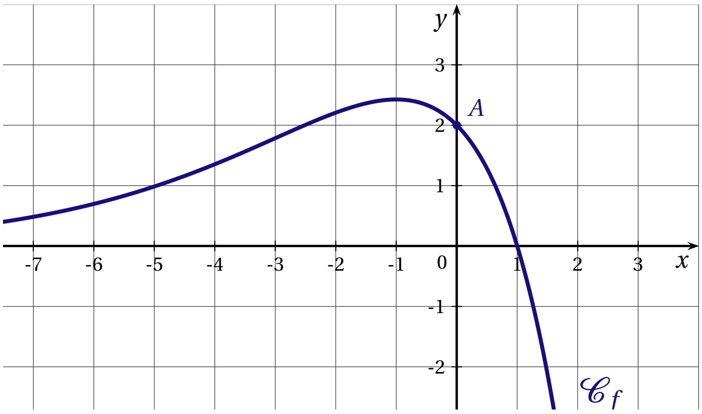
$$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3)$$

Donc :

$$\boxed{p(X \geq 4) \approx 0,240}$$

Exercice 3. Fonctions 9 points

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{0.5\,x}$. Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1.

1. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (-1-x)\,\mathrm{e}^{0.5\,x}$.

$$f : \begin{cases}]-\infty;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = 2(1-x)\times \mathrm{e}^{0,5x} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x \in]-\infty;+\infty[\ ;\ f(x) = u(x)\times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x) = 2(1-x) & ; \quad u'(x) = -2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{0,5x} & ; \quad v'(x) = 0,5\,\mathrm{e}^{0,5x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty;+\infty[,\ f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ f'(x) &= -2\times \mathrm{e}^{0,5x} + 2(1-x)\times 0,5\,\mathrm{e}^{0,5x} \\ f'(x) &= \Big(-2+(1-x)\times 0,5\Big)\mathrm{e}^{0,5x} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in]-\infty;+\infty[\ ;\ f'(x) = (-1-x)\,\mathrm{e}^{0.5\,x}}$$

1. b. Étudier les variations de la fonction f.

La dérivées s'exprime sous la forme d'un produit de facteurs. Le facteur $\mathrm{e}^{0,5x}$ étant strictement positif, la dérivée est du signe du facteur $(-1-x)$. Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x-1=0 \iff x=-1 \\ -x-1<0 \iff x>-1 \end{cases} \Bigg| \implies -x-1>0 \iff x<-1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-0.5}$	$\searrow$	

2. Montrer que dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α. Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.
Sur cet intervalle on a :

x	0	α	1
Variations de f	2 ↘	1 ↘	0

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[0;1]$:**
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0;1]$;
  - Le réel $k=1$ est compris entre $f(0)=2$ et $f(1)=0$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,* l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;1]$.
- **Valeur approchée .**
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta=0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0,63) & \approx & 1,01>1 \\ f(0,64) & \approx & 0,98<1 \end{array}\right| ,\quad \text{donc } 0,63<\alpha<0,64.$$

  Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\underline{\alpha\approx 0,63}$.

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère précédent.
L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a=0$ est $(T)\ :\ y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(0) & =+2 \\ f'(0) & =-1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad (T)\ :\quad \begin{array}{l} y=-1\times(x-0)\ +2 \\ \underline{y=-x+2} \end{array}$$

4. Un logiciel de calcul formel nous donne :

1 $(-1-x)\cdot\exp(0.5\cdot x)$
→ $(-x-1)\ e^{\frac{1}{2}x}$

2 $1
Dérivée: $\frac{1}{2}(-x-1)\ e^{\frac{1}{2}x}-e^{\frac{1}{2}x}$

3 $2
Factoriser: $-e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{x+3}{2}$

4. a. Étudier la convexité de la fonction f.
Pour étudier la convexité de f, il faut étudier le signe de la dérivée seconde.
Le logiciel de calcul formel nous donne la dérivée seconde en ligne 2 et sa factorisation en ligne 3. Pour tout réel x on a donc :

$$f''(x)=-e^{\frac{1}{2}x}\times\frac{x+3}{2}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, le facteur $\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right)$ est strictement négatif.

Le facteur $\left(\dfrac{x+3}{2}\right)$ est nul en (-3), positif après et négatif avant. On obtient donc :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$		$-$		$-$	
Signe de $\left(\dfrac{x+3}{2}\right)$		$-$	0	$+$	
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
Convexité de f		f convexe	‖	f concave	

4. b. La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.

La fonction change de concavité en $x = -3$ donc La courbe représentative de la fonction f présente donc un point d'inflexion au point $\mathrm{A}\big(-3\,;\, f(-3)\big)$.

Fin du devoir