Devoir Surveillé n°2A
Correction

Terminale ES
Continuité et Convexité
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. Tableau de variations — $2+1=3$ points

On donne les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.

x	-3		-1		0		α		1
Variations de f	-10		-5		-20		0		4

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.

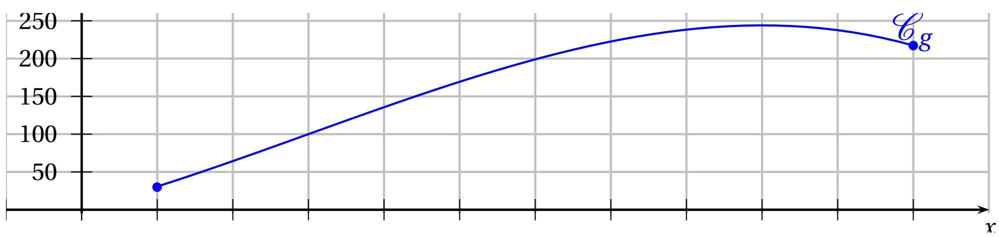
- Sur $[-3\,;\,0]$.
  Sur l'intervalle $[-3\,;\,0]$, la fonction f admet $f(-1)=-5$ comme maximum. De ce fait, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

- Sur $[0\,;\,1]$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
  - On a $k=0$ compris entre $f(1)=4$ et $f(0)=-2$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- Bilan : sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$, l'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution α.

2. En déduire le signe de de f sur son intervalle de définition.

x	-3		α		1
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2. Courbe de la fonction et équation — $8+2=10$ points



Partie A

On considère la fonction g définie sur $[1\,;\,11]$ par : $g(x)=-\dfrac{x^3}{3}+3x^2+27x+1$.

1. [1 point] Montrer que g est dérivable et que sa dérivée est définie sur $[1\,;\,11]$ par : $g'(x)=-x^2+6x+27$.

La fonction g est définie et dérivable sur son ensemble de définition comme somme et composée de fonctions qui le sont sur cet intervalle.

Pour tout réel de l'intervalle $[1\,;\,11]$ on a : $g'(x)=-x^2+6x+27$.

2. [2 points] Étudier le signe de la dérivée signe sur $[1\,;11]$.
La dérivée est une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+x avec :

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=6 \\ c=27 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 144>0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1=-3\notin[1\,;11] \\ x_2=9\in[1\,;11] \end{cases}$$

Le discriminant étant positif strictement, le trinôme a deux deux racines réelles. Il est du signe de $a=-1<0$ soit négatif à l'extérieur des racines et positif ailleurs.

La dérivée g' est donc positive de 1 à 9 et négative ailleurs.

3. [2 points] En déduire les variations de g sur $[1\,;11]$. On fera clairement figurer les images par g des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de g'.
La dérivée g' est positive de 1 à 9 et négative ailleurs soit le tableau de variations suivant :

x	1	α	9		11
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$g(1)\approx 30.67$	150	$g(9)=244$		$g(11)\approx 217.3$

4. Approximation de la solution de l'équation $g(x)=150$.

4. a. [2 points] Montrer que l'équation $g(x)=150$ admet une unique solution α sur l'intervalle de définition. Donner un intervalle comprenant α sur lequel la fonction est monotone.

- Sur $[9\,;11]$.
  Sur l'intervalle $[9\,;11]$, la fonction g admet $g(11)\approx 217$ comme minimum. De ce fait, l'équation $g(x)=150$ n'admet pas de solution.

- Sur $[1\,;9]$:
  - La fonction g est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[1\,;9]$;
  - On a $k=150$ compris entre $g(9)=244$ et $g(1)\approx 30,67$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $g(x)=150$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1\,;9]$.
- Bilan : sur l'intervalle $[1\,;11]$, l'équation $g(x)=150$ admet donc une unique solution α.

4. b. [1 point] Avec la calculatrice, donner une valeur une valeur approchée de α au centième.

- Avec un pas de $\Delta=0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} g\,(4,42) & \approx & 150,17>150 \\ g\,(4,41) & \approx & 149,83<150 \end{array}\right|$, donc $4,41<\alpha<4,42$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha\approx 4,42$.

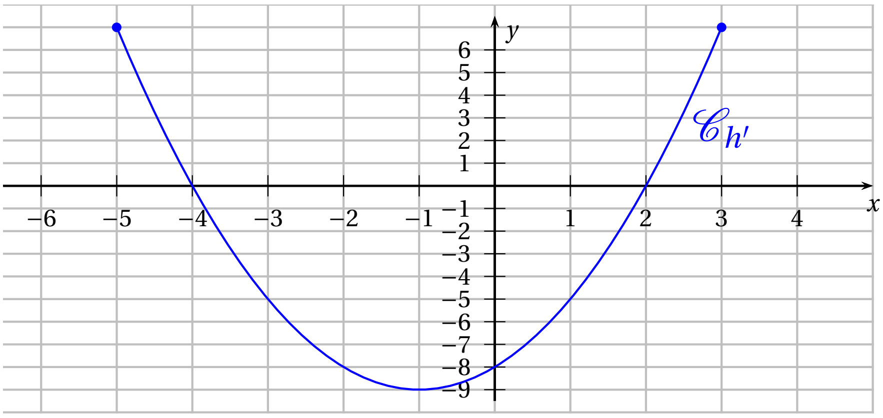
Partie B

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 100 et 1 100. On suppose que toute la production est commercialisée. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[1\,;11]$ *par la fonction* g .

5. [1 point] Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
Le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal est de 9 centaines soit 900.
Ce bénéfice est de $g(9)$ milliers d'euros soit 244 000 euros.

6. [1 point] Calculer la production permettant d'obtenir un bénéfice supérieur ou égal à 150 000 euros.
D'après le tableau de variation, la production permettant d'obtenir un bénéfice supérieur ou égal à 150 000 euros est comprise entre α centaines et 11 centaines d'unités. Soit puisque $4,41<\alpha<4,42$, pour plus de 442 unités.
Attention : pour 441 unité le bénéfice est inférieur à 150 000 euros !

Exercice 3. Courbe de la dérivée — 7 points



1. [1 point] D'après le graphique, dresser le tableau de signe de $h'(x)$ et le tableau de variation de h sur $[-5;3]$.

x	-5		-4		2		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h	$h(-5)$	$\nearrow$	$h(-4)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(3)$

2. *La fonction h est en fait la fonction :* $h(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-8x+1$.

2. a. [2 points] Déterminer la dérivée de h sur puis étudier son signe sur cet intervalle.

La fonction h est définie et dérivable sur son ensemble de définition comme somme et composée de fonctions qui le sont sur cet intervalle.
Pour tout réel de $[-5;3]$ on a : $h'(x)=x^2+2x-8$.

La dérivée est une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+x avec :

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-8 \end{cases} \Longrightarrow \Delta=36>0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1=-4\in[-5;3] \\ x_2=2\in[-5;3] \end{cases}$$

Le discriminant étant positif strictement, le trinôme a deux deux racines réelles. Il est du signe de $a=1>0$ soit positif à l'extérieur des racines et négatif ailleurs.
La dérivée h' est négative de -4 à 2 et positive ailleurs.

2. b. [1 point] En déduire les variations de h sur $[-5;3]$. On fera clairement figurer les images par h des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de h'.

La dérivée h' est négative de -4 à 2 et positive ailleurs, soit le tableau de variations suivant :

x	-5		-4	α	2		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h	$h(-5)\approx 24.3$	$\nearrow$	$h(-4)\approx 27.7$	5	$h(2)\approx -8.3$	$\nearrow$	$h(3)=-5$

2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question (1.)

3. Approximation de la solution de l'équation $h(x) = 5$.

3. a. [2 points] Montrer que l'équation $h(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-5;3]$. Donner un intervalle comprenant α sur lequel la fonction est monotone.

- Sur $[-5;-4]$.
  Sur l'intervalle $[-5;-4]$, la fonction h admet $h(-5) \approx 24.3$ comme minimum. De ce fait, l'équation $h(x) = 5$ n'admet pas de solution.
- Sur $[2;3]$.
  Sur l'intervalle $[2;3]$, la fonction h admet $h(3) = -5$ comme maximum. De ce fait, l'équation $h(x) = 5$ n'admet pas de solution.

- Sur $[-4;2]$:
  - La fonction h est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[-4;2]$;
  - On a $k = 5$ compris entre $h(2) \approx -8.3$ et $h(-4) \approx 27.7$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $h(x) = 5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-4;2]$.
- Bilan : sur l'intervalle $[-5;3]$, l'équation $h(x) = 5$ admet donc une unique solution α.

3. b. [1 point] Avec la calculatrice, donner une valeur une valeur approchée de α au centième.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcr} h(-0,48) & \approx & 5,03 > 5 \\ h(-0,47) & \approx & 4,9 < 5 \end{array}\right|$, donc $-0,48 < \alpha < -0,47$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx -0,48$.

Fin du devoir

Bonus

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 = -2$ sur $\mathbb{R}$ et une approximation de ces dernières au centième.

Les solutions sont :

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.73 \text{ ; } x_2 = 1 \text{ et } x_3 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$$