Devoir Surveillé n°5

Terminale ES/L

Fonctions logarithme et exponentielle

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice <u>est autorisé</u>.

Exercice 1. 7 points

Partie A

1. *Par lecture graphique et sans justification :*

1. a. Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
Le prix de vente de 100 litres (1 centaine de litres) de sorbet est de : 10 centaines d'euros soit <u>1 000 euros</u>.

1. b. Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
La recette, en centaines d'euros est : $\boxed{r(x) = 10x}$ où x est en centaines de litres dans l'intervalle $[0~;~3]$.

1. c. Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?
Pour que l'entreprise dégage un bénéfice, l'artisan doit produire au minimum <u>100 litres de sorbet</u>. En effet la droite D modélisant les recettes est au dessus de la courbe des coûts à partir de $x = 1$ soit après 1 centaine de litres.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1~;~3]$, on a où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$$

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1~;~3]$, on a : $B'(x) = -20x + 20\ln x + 30$.
Sur l'intervalle $[1~;~3]$, la fonction B est définie et dérivable comme somme et composée de fonctions qui le sont. La fonction B est de la forme $w + uv$ donc de dérivée $w' + u'v + uv'$ avec pour tout réel x de $[1~;~3]$:

$w(x) = -10x^2 + 10x$	$w'(x) = -20x + 10$
$u(x) = 20x$	$u'(x) = 20$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$

Donc tout réel x de $[1~;~3]$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= -20x + 10 + 20\ln x + 20x \times \frac{1}{x} \\ &= -20x + 10 + 20\ln x + 20 \\ B'(x) &= \underline{-20x + 20\ln x + 30} \end{aligned}$$

2. *On donne le tableau de variations de la fonction dérivée B' sur* $[1~;~3]$.

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1) = 10$	0	$B'(3) \approx -8.3$

2. a. Montrons que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur [1 ; 3].

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

- **Application du corollaire sur [1 ; 3]** :
  - La fonction B' est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1;3]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $B'(3) \approx -8,3$ et $B'(1) = 10$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1;3]$.
- **Valeur approchée** .
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} B'(2,35) & \approx & 0,088 > 0 \\ B'(2,36) & \approx & -0,0268 < 0 \end{array}\right|, \text{ donc } 2,35 < \alpha < 2,36.$$

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\underline{\alpha \approx 2,35}$, (on choisit la valeur d'image positive).

2. b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 3] puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

Le signe de $B'(x)$ se déduit aisément de son tableau de variations. On en déduit alors le tableau de variations de la fonction B'.

x	1	α	3
variations de B'	10 ↘	0 ↘	≈ -8.3

x	1		α		3
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	$B(1)$	↗	$B(\alpha)$	↘	$B(3)$

3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

D'après le tableau de variations, le maximum de la fonction B sur l'intervalle [1 ; 3] est atteint en α.
On a :

$$2,35 < \alpha < 2,36 \Longrightarrow \begin{cases} B(2,35) \approx 8,4325 \\ B(2,36) \approx 8,4328 \end{cases}$$

Donc $B(\alpha) \approx 8,43$ et le bénéfice maximal est d'environ 843 euros ce qui est inférieur aux 850 euros envisagés.

Exercice 2. Les suites, comme au Bac — 5 points

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 0{,}9 \times u_n + 2 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 20 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 20 \\ w_{n+1} &= (0{,}9\ u_n + 2) - 20 \\ w_{n+1} &= 0{,}9 \times u_n - 18 \\ w_{n+1} &= 0{,}9 \times \left(u_n + \frac{-18}{0{,}9}\right) \\ w_{n+1} &= 0{,}9 \times (u_n - 20) \\ w_{n+1} &= 0{,}9 \times w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $w_0 = -19$ puisque :

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 - 20 \\ w_0 &= 1 - 20 \\ w_0 &= -19 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_0 & = -19 \\ w_{n+1} & = 0{,}9 \times w_n \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = -19 \times (0{,}9)^n + 20}$$

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $w_0 = -19$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ w_n = w_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ w_n = -19 \times (0{,}9)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$w_n = u_n - 20$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = w_n + 20$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n = -19 \times (0{,}9)^n + 20}$$

3. Donner la limite de la suite (u_n).

Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0{,}9 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} -19 \times (0{,}9)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 20}$$

4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 19$.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} -19\times 0.9^n + 20 > 19 &\Longleftrightarrow -19\times 0.9^n > -1 \\ &\Longleftrightarrow 0.9^n < \frac{-1}{-19} = \frac{1}{19} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $x \longmapsto \ln x$ définie et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$-19\times 0.9^n + 20 > 19 \Longleftrightarrow \ln 0.9^n < \ln\frac{1}{19}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n\ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$-19\times 0.9^n + 20 > 19 \Longleftrightarrow n\ln 0.9 < \ln\frac{1}{19}$$

En divisant chaque membre par $\ln 0.9 < 0$, l'ordre change et :

$$-19\times 0.9^n + 20 > 19 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln\frac{1}{19}}{\ln 0.9} \approx 27.95$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 28.

5. *[Bonus] Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.*

Exercice 3. Position relative 2 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) - 2x$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T ?

La fonction f est définie et deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. La fonction f est de la forme $uv + w$ donc de dérivée $u'v + uv' + w'$ avec pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$:

$w(x) = -2x$	$w'(x) = -2$
$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \frac{1}{x}$

Donc tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\ln x + x\times\frac{1}{x} - 2 \\ f'(x) &= \ln x + -1 \end{aligned}$$

On obtient alors facilement pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction dérivée seconde est alors strictement positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et est donc convexe sur cet intervalle.
Sa courbe est alors toujours située au dessus de ses tangentes.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc située au dessus de T .

Exercice 4. Position relative ... encore ! 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}.$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonction qui le sont.
La fonction f est de la forme uv avec :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{x^2-1} & ; \quad v'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{x^2-1} + x \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{x^2-1}\left(1+2x^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2-1}}$$

1. b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

D'après la question **(1.a.)**, la fonction dérivée s'exprime comme le produit de deux facteurs. Or ces facteurs sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^2 \geq 0 \Longrightarrow 1+2x^2 \geq 1 > 0$$

Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 1+2x^2 > 0 \\ \mathrm{e}^{x^2-1} > 0 \end{cases}$$

Donc pour tout réel x, $f'(x)$ est positif ce qui implique que **la fonction f est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Proposition 1 (Fonction convexe)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.

Or pour tout réel x, la fonction f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$$

La dérivée seconde est donc clairement du signe de $2x$ puisque les deux autres facteurs sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 2x^2+3 \geq 3 > 0 \\ \mathrm{e}^{x^2-1} > 0 \end{cases}$$

La fonction f est donc <u>convexe sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$</u>.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right)$.

3. a. Justifier que l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1~;~1]$.

Pour tout réel x on a :

$$1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \geqslant \mathrm{e}^{x^2-1}$$

En composant par la fonction $x \longmapsto \ln x$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0 &\Longleftrightarrow \ln 1 \geqslant x^2 - 1 \\ &\Longleftrightarrow 0 \geqslant x^2 - 1 \end{aligned}$$

Or la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto x^2 - 1$ admet deux racines évidentes 1 et (-1). Son signe est alors celui du coefficient de x^2 soit 1 à l'extérieur des racines. Donc $(x^2 - 1)$ est négatif entre (-1) et 1 et positif ailleurs.

$$\boxed{1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in [-1~;~1]}$$

3. b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1~;~1]$.

D'après la question **3.a.**,

$$\begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in [-1~;~1] \\ 1 - \mathrm{e}^{x^2-1} = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

et donc $h(x)$ est du signe de x sur l'intervalle $[-1~;~1]$ et nul en (-1), 0 et 1 soit

x	-1		0		1
signe de $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right)$	0	$-$	0	$+$	0

3. c. En remarquant que pour tout réel x, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0~;~1]$.

- On a pour tout réel x on a :
$$x - f(x) = x - x\,\mathrm{e}^{x^2-1} = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right) = h(x)$$
- Donc la position de relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0~;~1]$ est donnée par le signe de $h(x)$ sur cet intervalle.
Or $h(x)$ est positif sur $[0~;~1]$ d'après la question **(3.b.)**.
De ce fait, $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite D sur l'intervalle $[0~;~1]$ et les abscisses des points d'intersection sont 0 et 1 sur cet intervalle.

ANNEXE à l'exercice 1