Chapitre 6

CALCUL INTÉGRAL

ACTIVITÉ 1

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=4$.

1. f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{5}{2}$.
2. f est la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x)=-0{,}4x+3{,}6$.

ACTIVITÉ 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+5}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal

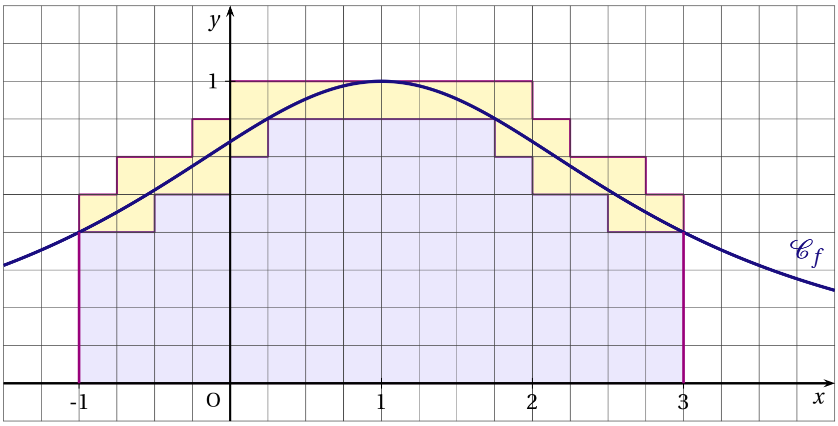
PARTIE A

1. Étudier le signe de $f(x)$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f

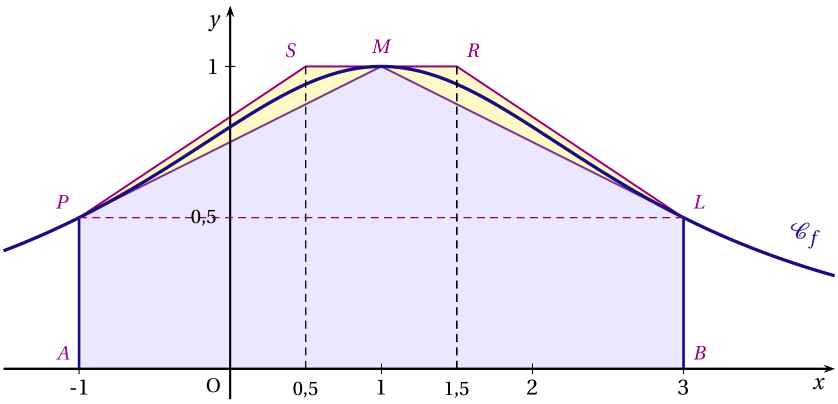
PARTIE B

On cherche à déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$.

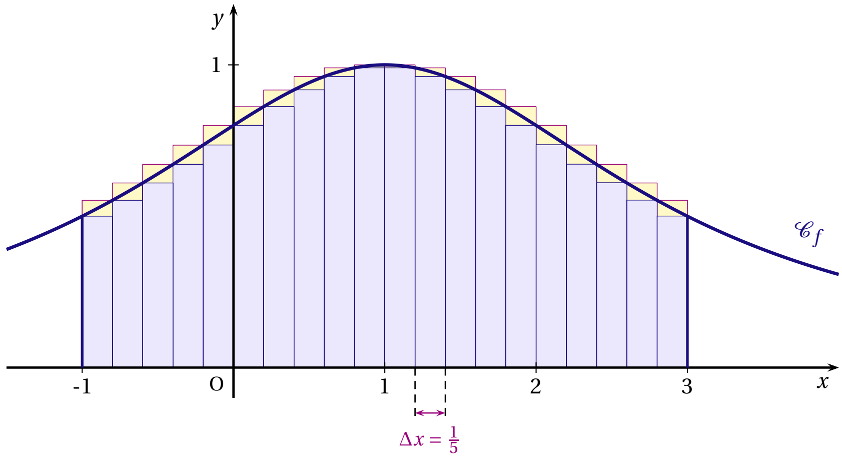
1. À l'aide du quadrillage, déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.



2. À l'aide des deux polygones, déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.



3. Encadrement par deux familles de rectangles.
   On subdivise l'intervalle $[-1;3]$ en 20 intervalles de même amplitude $\Delta x=0{,}2$.
   Sur chacun des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ avec $0\leqslant k<20$, le rectangle inscrit sous la courbe a pour longueur le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[x_k;x_{k+1}]$ et le rectangle circonscrit a pour longueur le maximum de la fonction f sur le même intervalle.



a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x_k	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{181}$	$\frac{25}{41}$	$\frac{100}{149}$	$\frac{25}{34}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{29}$				1
x_k	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	$\times$
$f(x_k)$											$\times$

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}_I$, somme des aires des rectangles inscrits et l'aire $\mathscr{A}_E$, somme des aires des rectangles circonscrits.

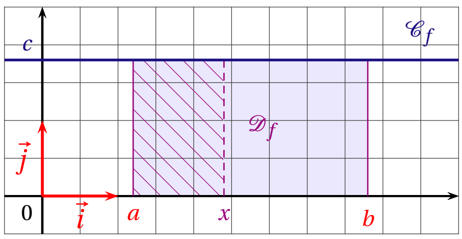
c) En déduire un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.

ACTIVITÉ 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$d'unité graphique 1 cm, a et b sont deux réels tels que $a<b$.
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie et positive sur l'intervalle $[a;b]$.
$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$et $\mathscr{D}_f$ le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

FONCTION CONSTANTE :

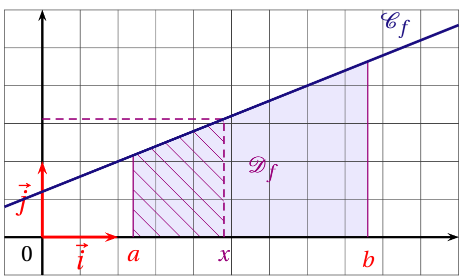
Soit c un réel positif. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=c$.



1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b)-F(a)$. Que constate-t-on?

FONCTION AFFINE :

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$ où m et p sont des réels fixés avec m non nul. f est supposée positive sur $[a;b]$.

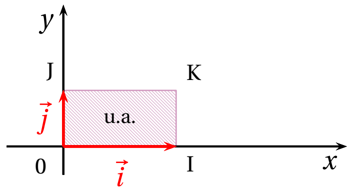


1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b)-F(a)$. Que constate-t-on?

I INTÉGRALE ET AIRE

1 UNITÉ D'AIRE

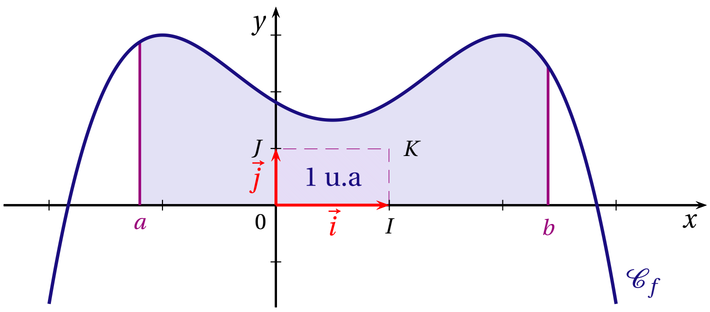
Soit $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec I(0;1), J(0;1) et K(1;1).



2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



REMARQUES

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

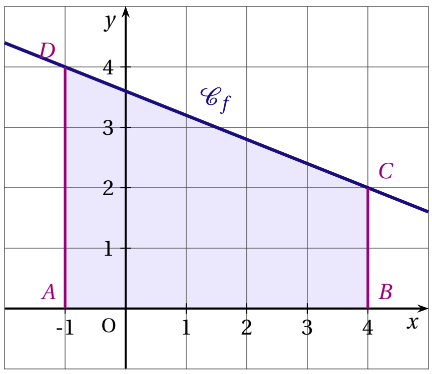
— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

— $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

EXEMPLES (*traités en activité*)

1. Calculons $\displaystyle\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$.
   La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0{,}4x+3{,}6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

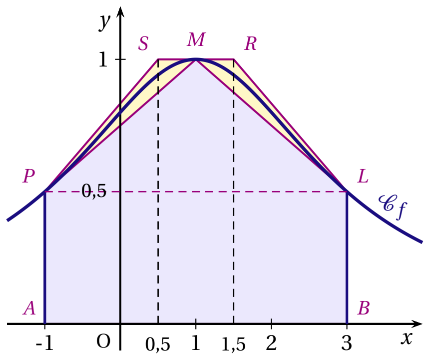
$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$



2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+5}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

f est dérivable donc continue et strictement positive. Par conséquent, $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$.

a) Le domaine $\mathscr{D}_f$ est encadré par des surfaces délimitées par des polygones dont on peut calculer l'aire à l'aide d'un découpage en figures simples du plan : triangle, carré, rectangle trapèze.
Soient $\mathscr{A}_I$ l'aire du polygone inscrit $ABLMP$ et $\mathscr{A}_E$ l'aire du polygone circonscrit $ABLRSP$.



— $\mathscr{A}_I$ est égal à la somme des aires du rectangle $ABLP$ et du triangle LMP d'où $\mathscr{A}_I=4\times 0{,}5+\dfrac{4\times 0{,}5}{2}=3$

— $\mathscr{A}_E$ est égal à la somme des aires du rectangle $ABLP$ et du trapèze $LRSP$ d'où $\mathscr{A}_E=4\times 0{,}5+\dfrac{(4+1)\times 0{,}5}{2}=3{,}25$

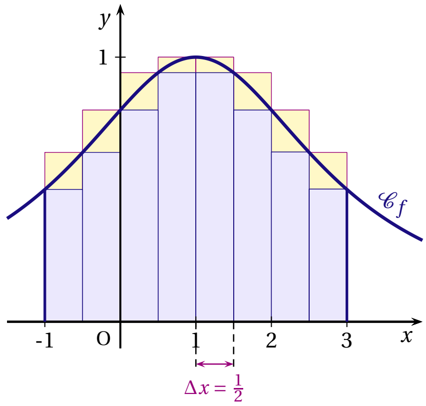
On en déduit que $3\leqslant\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3{,}25$.

b) Encadrement par deux familles de rectangles

On subdivise l'intervalle $[-1;3]$ en n intervalles de même amplitude pour obtenir un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ à partir de l'aire de deux familles de rectangles.

Subdivision de l'intervalle $[-1;3]$ avec un pas $\Delta x=\dfrac{1}{2}$.
Sur chacun des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ avec $0\leqslant k<8$, le rectangle inscrit sous la courbe a pour longueur le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[x_k;x_{k+1}]$ et le rectangle circonscrit a pour longueur le maximum de la fonction f sur le même intervalle.
Compte tenu des variations de la fonction f et des valeurs calculées ci-dessous,

x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{17}$	1	$\frac{16}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{2}$



L'aire $\mathscr{A}_I$, somme des aires des rectangles inscrits est :

$$\mathscr{A}_I=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2449}{850}\approx 2{,}88$$

L'aire $\mathscr{A}_E$, somme des aires des rectangles circonscrits est :

$$\mathscr{A}_E=\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{1437}{425}\approx 3{,}38$$

On en déduit que $\dfrac{2449}{850}\leqslant\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{1437}{425}$.
En choisissant une subdivision de l'intervalle $[-1;3]$ plus fine, on augmente la précision de l'encadrement.

Avec un pas $\Delta x=0{,}1$ on obtient $3{,}091\leqslant\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3{,}192$.

Avec un pas $\Delta x=0{,}01$ on obtient $3{,}136\leqslant\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3{,}147$.

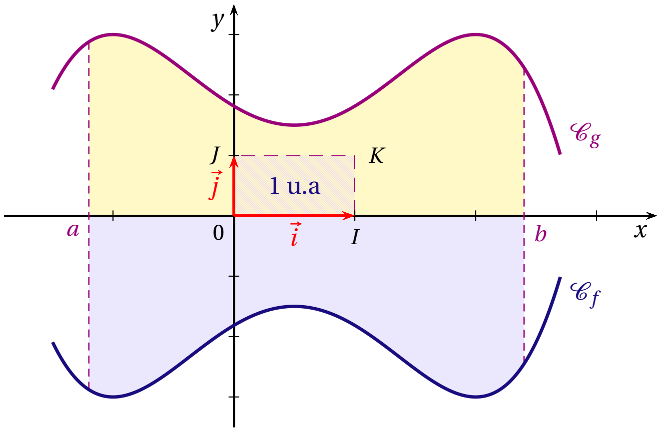
Remarque :

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{4}{x^2-2x+5}\right)\mathrm{d}x\approx 3{,}1415927$.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{4}{x^2-2x+5}\right)\mathrm{d}x=\pi$.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\mathscr{A}$$

4 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET DÉRIVÉE

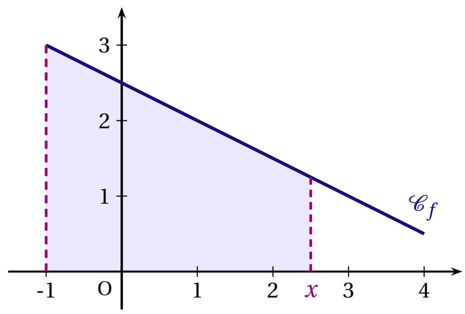
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

THÉORÈME *(admis)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.
Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.
On a donc $F(x)=\dfrac{(3+(-0{,}5x+2{,}5))\times(x+1)}{2}=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{11}{4}$
La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $F'(x)=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}=f(x)$.



II PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$
Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

PROPRIÉTÉ (*admise*)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

THÉORÈME

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

✻ DÉMONSTRATION

— Soient F une primitive de la fonction f sur I et k est un réel.
Si pour tout réel x de I, G est la fonction définie par $G(x) = F(x) + k$, alors $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I.
— Soient G et F deux primitives de f sur I.
On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$, alors H est dérivable sur I et

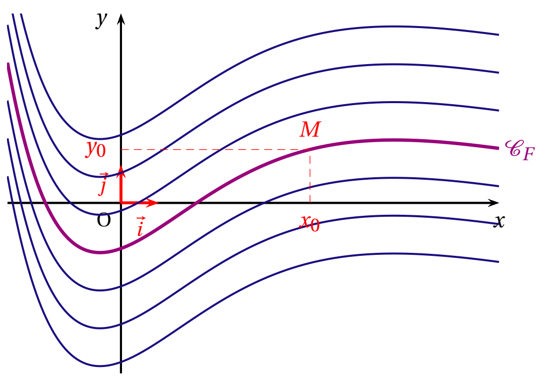
$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La dérivée H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I.
Ainsi, pour tout réel x de I, $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on connaît la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une primitive de f sur I, alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0; y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathscr{C}_F$ de la famille passant par ce point.



3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION

Si G est une primitive de f sur I, alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel.
La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.
Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

III CALCUL DE PRIMITIVES

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	sur $\mathbb{R}$

2 LINÉARITÉ

— Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
— Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I.

DÉMONSTRATION

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ et αF sont dérivables sur I.
— $(F+G)' = F' + G' = f + g$ donc $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
— $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$.
La fonction u définie par $u(x) = x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x) = \frac{x^3}{3}$.
Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln x$. Donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction v définie par $v(x) = -\frac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x) = -3\ln x$.
Donc la fonction $f = u + v$ admet comme primitive la fonction $F = U + V$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3\ln x$.

3 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F est donnée par...
$f = u'u$	$F = \dfrac{1}{2}u^2$
$f = u'u^n \quad n$ entier, $n > 0$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'\,\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$
$f = \dfrac{u'}{u^2} \quad u$ ne s'annule pas sur I	$F = -\dfrac{1}{u}$
$f = \dfrac{u'}{u^n} \quad (n$ entier, $n \geqslant 2)$ u ne s'annule pas sur I	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.
Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.
On a : $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2x) \times \mathrm{e}^{1-x^2}$ soit $f = -\dfrac{1}{2} \times u'\,\mathrm{e}^u$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + c$ où c est un réel à déterminer.
Or $F(1) = 0 \iff -\dfrac{1}{2} + c = 0 \iff c = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + \dfrac{1}{2}$.

IV INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b) - F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$; ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.
En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ d'où

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \left(x - \frac{1}{x} + \frac{\mathrm{e}}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{\mathrm{e}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln(1) - \frac{\mathrm{e}}{1}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \mathrm{e} - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

V PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.
Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$.
On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}\left(-x^2+3x+1\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3}\\ &= \left(-9+\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+6-2\right)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

✻ DÉMONSTRATION

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a))\\ &= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(t)\,\mathrm{d}t &= \alpha F(b)-\alpha F(a)\\ &= \alpha\,(F(b)-F(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

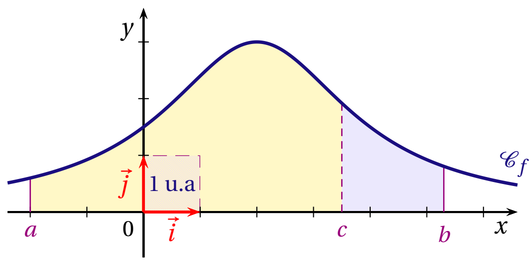
✼ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (F(c)-F(a))+(F(b)-F(c))\\ &= F(b)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$.



4 ORDRE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

✼ DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $f(x)-g(x)\leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f-g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a\leqslant b$ et $f-g\leqslant 0$ alors

$$\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0 \iff \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$

Attention la réciproque est fausse :

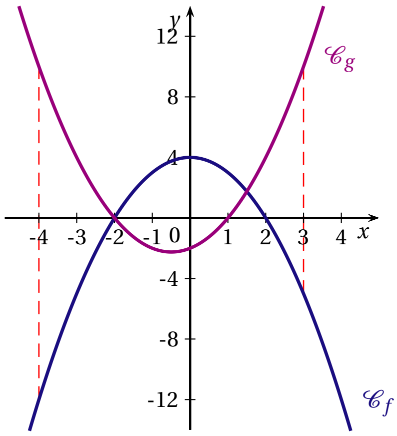
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$ et $g(x)=x^2+x-2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x &= \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}\\ &= \left(12-\frac{27}{3}\right)-\left(-16+\frac{64}{3}\right)\\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-4}^{3}\\ &= \left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}-6\right)-\left(-\frac{64}{3}+\frac{16}{2}+8\right)\\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x)\leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



VI INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ $(a<b)$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$, alors :

$$m\times(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\times(b-a)$$

DÉMONSTRATION

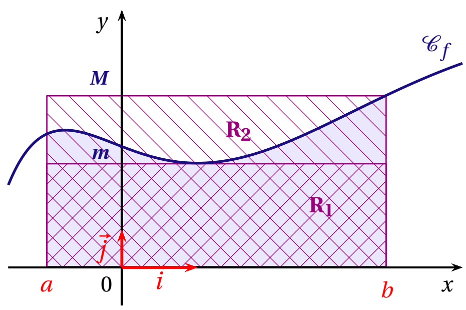
Les fonctions définies sur $[a;b]$ par $x\longmapsto m$ et $x\longmapsto M$ sont constantes donc continues.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$ $(a<b)$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\begin{aligned}\int_a^b m\ \mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\ \mathrm{d}x &\iff m\int_a^b \mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x\\ &\iff m\times(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\times(b-a)\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
R_1 de côtés m et $b-a$;
R_2 de côtés M et $b-a$.



2 VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b - a$.