

Les fonctions sinus et cosinus

1 Équation trigonométrique

Équations trigonométriques

- L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes sur \mathbb{R} :

$$x = a + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

- L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes sur \mathbb{R} :

$$x = a + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2 Signe des fonctions sinus et cosinus

Sur l'intervalle $] -\pi; \pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	-	-1	-	0	+	1	+	0
$\cos x$	-1	-	0	+	1	+	0	-	-1

3 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Parité

- La fonction sinus est **impaire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$
- La fonction cosinus est **paire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$

Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π **périodiques** : $T = 2\pi$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

De sinus à cosinus

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

4 Dérivées et limites

Dérivées

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} :

$$\sin' x = \cos x \quad \text{et} \quad \cos' x = -\sin x$$

Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

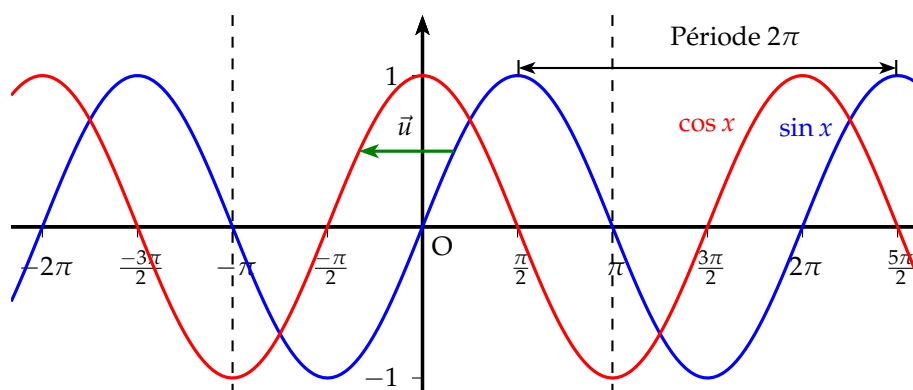
5 Variations et représentations

- Les variations des fonctions sinus et cosinus sont les suivantes :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$\sin' x = \cos x$	-	0	+	0	-
$\sin x$	0		1		0

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x = -\sin x$	+	0	-
$\cos x$	-1	1	-1

- Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoides.



6 Fonctions $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$

Dérivée

Les fonctions $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$ sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\sin'(ax + b) = a \cos(ax + b) \quad \text{et} \quad \cos'(ax + b) = -a \sin(ax + b)$$

Périodicité

Les fonctions $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$ sont $\frac{2\pi}{a}$ périodiques

7 Application aux ondes progressives

Un son pur est une onde sinusoïdale caractérisée par :

- Sa fréquence F (en Hertz, nombre de pulsations par seconde) qui détermine la hauteur du son.
- Son amplitude (pression acoustique) P (en Pascal).

La fréquence F est relié à la période T de la sinusoïde par la relation : $F = \frac{1}{T}$

La fonction f associée est donc de la forme : $f(t) = P \sin(2 \pi F t)$

La note de référence (donnée par un diapason) sur laquelle s'accordent les instruments de l'orchestre est le la_3 qui vibre à 440 Hz. Pour une amplitude de 1 Pa, cette note peut être associé à la fonction f définie par : $f(t) = \sin(880\pi t)$.

L'écran d'un oscilloscope donne alors :

