Raisonnement par récurrence. Limite d'une suite

Raisonnement par récurrence

EXERCICE 1

Prouver que pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

EXERCICE 2

Prouver que pour tout entier n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

EXERCICE 3

Est-il vrai que pour tout entier $n \geqslant 1$, $n^3 + 2n$ est un multiple de 3 ?

EXERCICE 4

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

EXERCICE 5

On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ où $n \geqslant 1$. *Somme des carrés*

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

b) Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE 6

On pose : $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ où $n \geqslant 1$ *Somme des cubes*

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

b) Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 7

On note $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ où $n \geqslant 1$
Démontrer, par récurrence que pour tout naturel n non nul : $n! \geqslant 2^{n-1}$

EXERCICE 8

La suite (u_n) est la suite définie par : $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

Remarque : On pourra étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = x(2-x)$

EXERCICE 9

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout naturel n, $0 < u_n < 2$ et que (u_n) est croissante

Exercice 10

Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1\ ,\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n$

⚠ Il faut deux termes pour initialiser cette propriété.

Exercice 11

But de l'exercice : on ne connaît pas l'expression de u_n en fonction de n. On cherche à l'aide des premiers termes à établir une conjecture quant à l'expression de u_n en fonction de n. On démontre ensuite cette conjecture.

La suite (u_n) est définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$

a) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5.

b) Que peut-on faire comme conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n ?

c) Démontrer cette conjecture par récurrence et donner la valeur exacte de u_{2014}.

Exercice 12

On rappelle que la dérivée de $g(x) = x$ est $g'(x) = 1$,
et la dérivée du produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f_n(x) = x^n$
Démontrer par récurrence que f_n est dérivable et que pour tout réel x : $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right) u_n + \dfrac{6}{n+1} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 ; u_2 et u_3

b) Soit la suite (d_n) définie par : $d_n = u_{n+1} - u_n$.
Écrire un algorithme permettant de calculer u_n et d_{n-1} en fonction de $n \geqslant 1$ puis remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	5						
d_n							

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite (d_n).

2) On considère la suite arithmétique (v_n) de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4) Valider la conjecture émise à la question 1) b).

Limite d'une suite

Dans les exercices 14, 15 et 16 déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les théorèmes sur les opérations de limites.

Exercice 14

1) $u_n = \dfrac{2n+5}{3n-2}$ 2) $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+5}$ 3) $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+1}{2(n+1)^2}$

Exercice 15

1) $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$ 2) $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+2}$ 3) $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$

Exercice 16

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+2}$ 2) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n-2}$

Exercice 17

Déterminer la limite des suites suivantes à l'aide du théorème de comparaison :

a) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ b) $v_n = n + 1 - \cos n$

Exercice 18

La suite (u_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) Écrire un algorithme qui donne u_n, n étant donné. Donner alors u_{10}, u_{20} et u_{50}. Que peut-on conjecturer quant à la limite de (u_n) ?

c) Démontrer que pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$

d) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

Limite d'une suite géométrique

Exercice 19

Déterminer la limite de la suite (u_n) tel que : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

Exercice 20

Soit la suite $(u_)$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$

Soit la suite (v_n) telle que : $v_n = u_n + 3$.

1) a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n

2) On note $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

   a) Calculer S_n et S'_n en fonction de n.

   b) En déduire les limites des suites (S_n) et (S'_n)

Exercice 21

Centres étrangers juin 2013

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + 0,5^n(1 + 0,5n)}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 22

Pour les cas suivants, préciser si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

a) $u_n = \sin n$

b) $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

c) $u_n = 2^n$

d) $u_n = n + \cos n$

e) $u_n = (-1)^n \times n^2$

Suite monotone

Exercice 23

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

Exercice 24

Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes en justifiant votre réponse.

a) Si un suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$

b) Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$

c) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.

d) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

EXERCICE 25

Deux méthodes pour trouver la limite d'une suite

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

Partie A : première méthode

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n < 1$

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que la suite (u_n) est alors croissante.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ

3) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$

a) Déterminer la valeur de ℓ

b) Proposer un algorithme pour déterminer la valeur de N tel que : $\forall n > N,\ |u_n - \ell| < 10^{-3}$.
Entrer cet algorithme sur votre calculatrice puis déterminer N.

Partie B : deuxième méthode

1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 26

Amérique du Nord juin 2013 - Extrait

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

1) On considère l'algorithme suivant :

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Remplir le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs approchées à 10^{-4}
Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

```
Variables : n, i  entiers naturels
            u : réel positif
Entrées et initialisation
    Lire n
    1 → u
Traitement
    pour i variant de 1 à n faire
        √(2u) → u
    fin
Sorties : Afficher u
```

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée					

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

EXERCICE 27

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

a) La suite (u_n) est bornée.

b) La suite (u_n) converge.

c) La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.

d) Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

EXERCICE 28

Métropole juin 2013

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant n + 3$

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

   c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.

   a) Exprimer S_n en fonction de n.

   b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 29

Liban mai 2013

On considère la suite numérique (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

Partie A

1) Écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

2) Compléter le tableau suivant pour $n = 8$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	1,800	2,143						

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 30

Antilles-Guyane 2012 extrait

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 31

Asie juin 2013

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2) a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) On considère l'algorithme suivant :

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de u seront arrondies à 10^{-4}. Conjecturer alors le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Variables : n entier naturel
u réel positif
Entrées et initialisation
Lire n
$2 \to u$
Traitement et sorties
pour i variant de 1 à n **faire**
$\dfrac{1 + 0.5u}{0.5 + u} \to u$
Afficher u
fin

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b) montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 32

Antilles-Guyane juin 2014

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \end{cases}$

1) a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4) Recopier et compléter les pointillés de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Donner alors la valeur trouvée par l'algorithme.

Variables : n : entier u : réel
Entrées et initialisation
  $0 \to n$
  $2 \to u$
Traitement
  tant que ...... **faire**
    ...... $\to n$
    ...... $\to u$
  fin
Sorties : Afficher n