Contrôle de mathématiques

Jeudi 18 octobre 2012

Exercice 1

ROC **3 points**

1) **Prérequis** : Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

   Démontrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$

2) **Application :** Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$
   a) Etudier la monotonie de la suite $u_n)$
   b) Montrer par récurrence que pour tout n : $u_n \geqslant n^2$
   c) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n)

Exercice 2

Récurrence **2 points**

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$t_0 = 0 \quad \text{et pour tout naturel } n \quad t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Démontrer par rérurrence que, pour tout naturel n, on a : $t_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 3

Limites de suites **3 points**

Déterminer la limites des suites (u_n) suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2n^2 - 2n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 4 + \dfrac{\sin n}{n^2}$

Exercice 4

Vrai-Faux **4 points**

Soit une suite (u_n) dont aucun terme est nul.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux et justifier votre réponse :

1) Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
2) Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par -1

3) Si (u_n) est décroissante alors (v_n) est croissante.
4) Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.

EXERCICE 5

D'après Pondichéry avril 2008 **4 points**

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{10}x(20 - x)$
   Étudier les variations de f sur $[0\,;20]$.
2) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
   En 2015, quel nombre de foyers français possèdant un téléviseur à écran plat peut-on envisager ?

EXERCICE 6

Algorithme **4 points**

(u_n) est la suite définie pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Paul affirme « sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, je pense que la limite de la suite (u_n), si elle existe, ne peut être infinie, ni même dépasser 10 ».

1) Quel est la rôle de l'algorithme ci-contre ?
2) Coder cet algoritme sur votre calculette, puis exécuter successivement cet algorithme pour A = 10, A = 50, A = 100.
   (⚠ il faut être patient pour les deux derniers)
3) Les résultats affichés en sortie permettent-ils de confirmer ou d'infirmer les affirmations de Paul ? Justifier la réponse.

Entrée
Saisir la valeur de A
Initialisations
u prend la valeur 1
k prend la valeur 1
Traitement
Tant que u <= A
  k prend la valeur $k + 1$
  u prend la valeur $u + \dfrac{1}{\sqrt{k}}$
FinTantque
Sortie
Afficher k

4) En remarquant que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, montrer que $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
5) Déterminer la limite de la suite (u_n)