Correction contrôle de mathématiques

Mardi 14 octobre 2014

EXERCICE 1

ROC **(2 points)**

Voir cours

EXERCICE 2

Limite de suite **(4 points)**

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{4n^2 + 3n - 1 + (-2n+3)(2n+1)}{2n+1} = \dfrac{4n^2 + 3n - 1 - 4n^2 - 2n + 6n + 3}{2n+1} = \dfrac{7n+2}{2n+1}$

$$u_n = \frac{n\left(7 + \frac{2}{n}\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{7 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \quad \text{donc} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 7 + \frac{2}{n} = 7 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{7}{2}\end{array}$$

b) $$u_n = \frac{n\left(n + 5 + \frac{7}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n} - 1\right)} = \frac{n + 5 + \frac{7}{n}}{\frac{2}{n} - 1} \quad \text{donc} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n + 5 + \frac{7}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} - 1 = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty\end{array}$$

c) $2 - n + (-1)^n < 2 - n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n < 3 - n \quad$ or $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} 3 - n = -\infty$

Par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

d) $u_n = 3 \times \dfrac{4}{3} \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = 4\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$

par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

EXERCICE 3

Suite monotone **(4 points)**

1) $u_1 = u_0^2 - 2u_0 + 2 = \dfrac{9}{4} - 3 + 2 = \dfrac{5}{4}$

$u_2 = u_1^2 - 2u_1 + 2 = \dfrac{25}{16} - \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{25 - 40 + 32}{16} = \dfrac{17}{16}$

2) a) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$

or $(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - u_n - 2u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$ donc $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

b) On sait que $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant u_n - 2 \leqslant 0$ et $0 \leqslant u_n - 1 \leqslant 1$

On en déduit donc que $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers ℓ. On ne peut en donner la valeur, on peut seulement dire que $1 \leqslant \ell \leqslant 2$

Exercice 4

Vrai-Faux **(3 points)**

a) **Proposition vraie**. $u_n = 2 + \dfrac{\cos n}{n}$ donc de $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \Rightarrow$
$-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$
d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 2.

b) **Proposition fausse**. On peut simplement dire, d'après le théorème des suites monotones que la suite converge vers $\ell \geqslant 0$ mais pas que $\ell = 0$.

Contre exemple : Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. La suite u_n est manifestement décroissante car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n > 1 > 0$, les termes de la suite sont strictement positifs. Cependant : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$, la suite (u_n) converge vers 1.

c) **Proposition fausse**. Pour que la suite (u_n) tende vers $+\infty$, il faudrait que la suite ne soit pas majorée.

Contre exemple : soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 1 - (0,5)^n$.
$u_{n+1} - u_n = -0,5^{n+1} + 0,5^n = 0,5^{n+1} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$ par somme la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 5

Suite homographique **(7 points)**

1) a) $2 - \dfrac{5}{u_n + 4} = \dfrac{2u_n + 8 - 5}{u_n + 4} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} = u_{n+1}$

b) **Initialisation :** $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 < 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : On suppose que $0 \leqslant u_n < 1$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} < 1$

$0 \leqslant u_n < 1 \Leftrightarrow 4 \leqslant u_n + 4 < 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{u_n + 4} \leqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4} \leqslant -\dfrac{5}{u_n + 4} < -1 \Leftrightarrow$
$2 - \dfrac{5}{4} \leqslant 2 - \dfrac{5}{u_n + 4} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{3}{4} \leqslant u_{n+1} < 1$

La proposition est héréditaire.
Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leqslant u_n < 1$

2) a) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$

Remarque : : On peut montrer que la suite est croissante en calculant :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 4}$$

$$0 \leqslant u_n < 1 \quad \Rightarrow \quad -3 < -u_n^2 - 2u_n \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - u_n^2 - 2u_n > 0 \ \ (1)$$

$$0 \leqslant u_n < 1 \quad \Rightarrow \quad u_n + 4 \geqslant 4 > 0 \ \ (2), \ \text{ de (1) et (2) on a } \ u_{n+1} - u_n > 0$$

b) $\ell = \dfrac{2\ell+3}{\ell+4} \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 + 4\ell = 2\ell + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 + 2\ell - 3 = 0$

$\ell_1 = 1$ racine évidente or $P = -3$ donc $\ell_2 = -3$. Comme on sait que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, donc $\ell = 1$. La suite (u_n) converge vers 1.

3) a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \dfrac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \dfrac{u_n - 1}{5(u_n+3)} = \dfrac{1}{5} v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{5}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et de 1[er] terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_n + 3} = -\dfrac{1}{3}$

b) $v_n = v_0 q^n = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ de $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \quad \Leftrightarrow \quad v_n u_n + 3v_n = u_n - 1 \quad \Leftrightarrow$

$$u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$. Par sommes, produit et quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

4) On cherche à déterminer la valeur de N à partir de laquelle $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. On propose alors l'algorithme suivant où certaines instructions ont été effacées.

a) Voir ci-contre

b) On trouve $N = 9$

c) La suite converge très rapidement vers sa limite car il lui faut 9 termes pour s'approcher à moins d'un millionième de sa limite !

Variables : N : entier $\quad U$: réel
Entrées et initialisation
$0 \to N$
$0 \to U$
Traitement
tant que $|U - 1| > 10^{-6}$
faire
$N + 1 \to N$
$\dfrac{2U+3}{u+4} \to U$
fin
Sorties : Afficher N