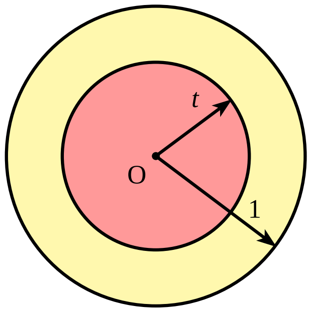
Loi de probabilité à densité
Loi normale

EXERCICE 1

A la recherche de la densité



On tire au hasard sur une cible de rayon 1 m sans jamais la manquer.
X est la variable aléatoire qui donne la distance , en mètre, de l'impact au centre de la cible.
Ainsi, X prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ;1].
Selon le modèle usuel, pour tout $t \in [0;1]$, la probabilité de l'événement « $X \leqslant t$ » est définie par :

$$P(X \leqslant t) = \frac{\text{aire disque de rayon } t}{\text{aire de la cible}}$$

1) Pour tout $t \in [0, 1]$, on considère la fonction de répartition F telle que : $F(t) = P(X \leqslant t)$. Exprimer $F(t)$ en fonction de t.
2) On note f la densité sur [0 ;1] de la loi de X
   a) Écrire $F(t)$ sous la forme d'une intégrale.
   b) Justifier que F est dérivable sur [0 ;1] et préciser sa dérivée.
   c) En déduire l'expression de la densité f. Représenter alors $\mathscr{C}_f$.

Loi uniforme

EXERCICE 2

Une rame de métro relie deux stations M_1 et M_2 en un temps compris entre 8 et 12 minutes. On note X la durée du trajet lors d'une liaison.
On suppose que X suit une loi uniforme sur [8 ;12]

1) Quelle est la densité de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité que la rame relie les deux stations en moins de 9min 30s.
3) La rame quitte M_1 à huit heures et un usager arrive en M_2 à 8h11. La rame reste en gare une minute. Quelle est la probabilité que l'usager rate le métro ?

Loi exponentielle

EXERCICE 3

On suppose que la durée de vie d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.

2) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

EXERCICE 4

La durée de vie X, en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne, est modélisée par une loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre $\lambda = 0,000\,5$.

1) La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $e^{-\frac{2500}{2000}}$ B : $e^{\frac{5}{4}}$ C : $1 - e^{-\frac{2500}{2000}}$ D : $e^{-\frac{2000}{2500}}$

2) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531, 24 D : 3 000

EXERCICE 5

La durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ. Une étude statistique à montrer que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1) Calculer la valeur λ arrondie à trois décimales.
2) Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :
   a) moins de 8 ans
   b) plus de 10 ans
   c) au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de trois ans
3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant.

EXERCICE 6

La durée de vie T, en heure, d'un transistor suit une loi exponentielle telle que : $P(\mathrm{T} \leqslant 1000) = 0,095$

1) Calculer la probabilité conditionnelle : $P_{\mathrm{T} \geqslant 1000}(\mathrm{T} \geqslant 2000)$
2) Déterminer, à 1 h près, la durée $t_{1/2}$ telle que : : $P(\mathrm{T} \leqslant t_{1/2}) = 0,5$

EXERCICE 7

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer en fonction de λ la valeur $t_{1/2}$ telle que : $P(\mathrm{X} \leqslant t_{1/2}) = P(\mathrm{X} \geqslant t_{1/2})$
2) On suppose que $t_{1/2} = 99$. Calculer $P(100 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200)$.

EXERCICE 8

La durée de vie X, en année, d'un élément radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ

1) La demi-vie $t_{1/2}$ du carbone 14 est estimé à environ 5 568 ans, avec $t_{1/2}$ défini par $P(\mathrm{X} \leqslant t_{1/2}) = 0,5$.
   a) Calculer $P(\mathrm{X} < 1000)$.
   b) Déterminer, à un an près, la valeur de x telle que : $P(\mathrm{X} < x) = 0,2$

2) La demi-vie du césium 137 est $t_{1/2} \simeq 30$ ans. Répondre aux mêmes questions que le carbone 14.

   Remarque : Le césium 137 est l'un des nombreux produits de fission de l'uranium et sans doute le plus connu pour avoir été utilisé dans les études hydrologiques et écologiques suite à une contamination générale de l'atmosphère induite, à partir de 1945, par l'utilisation des bombes atomiques et des essais nucléaires (puis l'accident de Tchernobyl) *Wikipédia*

Exercice 9

Deux composants A et B sont montés en série sur une machine. La durée de vie (exprimée en jour) de l'un d'eux est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,4$.
La panne d'au moins l'un d'entre eux, A ou B, entraîne l'indisponibilité de la machine. Les pannes de A et B sont supposées indépendantes les unes des autres. On note $\mathrm{T_A}$ la durée de vie de A et $\mathrm{T_B}$ celle de B.

1) a) Calculer $P(\mathrm{T_A} \geqslant 300)$.
   b) Calculer la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours.
2) On se place dans le cas où les composants A et B montés en parallèle. La machine n'est alors indisponible que si A et B sont en panne. Calculer la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours.

Exercice 10

X est une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillisement de paramètre $k > 0$.
On désigne par a un nombre tel que : $0 < a < 1$
L'objectif est de déterminer le plus grand entier n tel que : $P(\mathrm{X} \leqslant n) \leqslant 1 - a$

1) Résoudre le problème algébriquement en exprimant n en fonction de k et de a.
2) On donne l'algorithme ci-dessous dont l'objectif est de déterminer n
   a) Quel est la fonction f utilisée ?
   b) Tester cet algorithme pour les couple $(k; a)$ suivants :

      $(0,1\,;\,0,05)$; $(0,01\,;\,0,1)$; $(0,1\ln 2\,;\,0,2)$

      Comparer les résultats avec les valeurs exactes du 1). Pourquoi cette différence ?
   c) Modifier alors cet algorithme pour qu'il fonctionne.

Variables : K, A : réels et N : entier
Entrées et initialisation
  Lire K, A
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $f(N) \leqslant 1 - A$ **faire**
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

Exercice 11

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs (chutes de pierres, présence ce troupeaux sur la route, verglas, etc.).
Un autocar part du dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance, en km, que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.
Les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

1) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

 a) comprise entre 50 et 100 km ; b) supérieure à 300 km.

2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 300 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
3) Quelle est la distance moyenne d_m parcourue sans incident ? Justifier.
4) L'entreprise possède 96 autocars. Les distances parcourues par chacun d'eux sont des variables aléatoires de même loi exponentielle vue ci-dessus.

 Les incidents qui peuvent survenir aux autocars sont indépendants les uns des autres.

 Pour tout nombre $d > 0$, X_d désigne la variable aléatoire qui donne le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

 a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_{d_m} ?
 b) Quel est, à une unité près, le nombre moyen autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d_m kilomètres ?

Exercice 12

D'après une étude statistique sur la durée d'attente, en minute, aux vingt caisses d'un hypermarché :

- six caisses ont une durée d'attente qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$;
- les autres caisses ont une durée d'attente qui suit la loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,1$.

Un client choisit une caisse au hasard. On note T sa durée d'attente, exprimée en minute.

1) On désigne par t un nombre positif.

 On se propose de déterminer la probabilité $P(T \leqslant t)$.

 a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
 b) En déduire $P(T \leqslant t)$.

2) Calculer à 10^{-3} près la probabilité que ce client attende

 a) moins d'un quart d'heure ; c) entre 5 et 20 minutes.
 b) plus de 10 minutes ;

Exercice 13

Un fabricant vend un modèle de jouet électronique.
La variable aléatoire T qui indique la durée de vie, exprimée en année, d'un jouet pris au hasard dans la production, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{3}$.
Pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

1) a) Quelle est la probabilité p que le jouet ne fonctionne plus au bout d'un an ?
 b) On désigne par t un nombre positif. Exprimer, en fonction de t, la probabilité $P(T > t)$.
2) On a acheté un jouet de ce type.

 On note A l'événement « Le jouet n'a aucune défaillance pendant un an » et B l'événement « Le jouet n'a aucune défaillance pendant trois ans ».

 Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ puis $P_A(B)$.

3) Le fabricant garantit ses jouets un an. Il s'engage alors à rembourser les jouets défectueux.
   a) Quel taux de remboursement doit-il prévoir ?
   b) Quelle durée de garantie t_0 (à 1 mois près) aurait-il dû proposer pour que ce taux ne dépasse pas 8 % ?
4) Un commerçant achète un lot de trois jouets et le fabricant offre pour chaque jouet la garantie d'un an. X désigne le nombre de jouets remboursés sur ce lot.
   a) Dresser en fonction de p le tableau de la loi de X.
   b) Quelle est en fonction de p l'espérance de X ?

Loi normale centrée réduite

Exercice 14

Un variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite.

1) Calculer :
   a) $P(\mathrm{T} < 1,8)$
   b) $P(\mathrm{T} < -1,8)$
   c) $P(\mathrm{T} > 2,58)$
   d) $P(-1,21 < \mathrm{T} < 1,44)$
2) Calculer le nombre réel u tel que :
   a) $P(\mathrm{T} < u) = 0,14$
   b) $P(\mathrm{T} > u) = 0,25$
   c) $P(0 < \mathrm{T} < u) = 0,4$

Exercice 15

Un variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite. Dans chaque cas, déterminer l'arrondi au millième du nombre u tel que :

a) $P(-u < \mathrm{T} < u) = 0,915$
b) $P(-u < \mathrm{T} < u) = 0,732$

Exercice 16

Lors d'un concours, la moyenne des notes est 8.
T est la variable aléatoire qui donne l'écart $t - 8$ où t est la note obtenue par le candidat.
T suit la loi normale centrée réduite.

1) À combien faut-il fixer la note d'admission de ce concours pour que 60 % des candidats soient reçu ? Donner l'arrondi au centième.
2) Dans quel intervalle de notes se trouvent 80 % des candidats.

Exercice 17

La température T relevée en janvier, en milieu de journée, suit une loi normale centrée réduite.

1) Interpréter dans ce contexte, la valeur 0 de l'espérance de T.
2) Justifier que dans plus de 95 % des cas, la température relevée est entre -2˚C et +2˚C.
3) Quelle est la fourchette de températures dans laquelle on trouve les températures relevées dans 99 % des cas ?

4) Donner une estimation de la probabilité d'avoir un jour de janvier, une température supérieure à +2°C, puis vérifier à la calculatrice.

Exercice 18

Étude de la fonction φ

φ désigne la fonction de Laplace-Gauss.

1) a) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)$$

b) En déduire les variations de φ et de φ'.

2) On appelle $\mathscr{C}_\varphi$ la courbe de Gauss et I et J les points d'abscisses respectifs -1 et 1.

a) Déterminer les équations des tangentes, T_i et T_j, à $\mathscr{C}_\varphi$ aux points I et J.

b) On appelle les points I et J des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_\varphi$. Qu'on de particulier les tangentes T_i et T_j ?

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}_\varphi$ ainsi que les tangentes T_i et T_j. On prendra comme unité : 2 cm sur les abscisses et 10 cm sur les ordonnées.

Loi normale générale

Exercice 19

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathscr{N}(-4; 7)$ Calculer à 10^{-4} les probabilités suivantes :

1) $P(-11 \leqslant X \leqslant 3)$ 2) $P(-5 < X < 0)$ 3) $P(X \leqslant -5 \text{ ou } X \geqslant 0)$

Exercice 20

1) La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{N}(\mu, 0,16)$. Déterminer μ à 10^{-2} près, pour que :

a) $P(X < -3,2) = 0,05$ b) $P(X > 5,6) = 0,05$

2) La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{N}(120, \sigma^2)$. Déterminer σ à 10^{-2} près, pour que :

a) $P(X < 100) = 0,05$ b) $P(X > 140) = 0,05$

Exercice 21

Une machine produit des clous dont la longueur moyenne est de 12 mm, avec un écart-type de 0,2 mm.
La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale.
Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieure à 12,5 mm ou inférieure à 11,5 mm.

1) Quelle est la proportion de clous défectueux ?

2) Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieure à 11,5 mm ?

Exercice 22

La durée de vie d'une ampoule électrique, en heures, d'un type donné suit une loi normale de moyenne 2 200 et d'écart-type 200.
Quelle est la probabilité qu'une telle ampoule dure :

a) moins de 2 000 heures ?

b) plus de 2 400 heures ?

c) entre 2 000 heures et 2 400 heures ?

Exercice 23

Dans un supermarché, le gérant a établi une statistique de ses ventes quotidiennes de packs d'eau minérale. Il apparaît que le nombre X de packs vendue chaque jour suit une loi normale de moyenne 52 et d'écart-type 12.

1) Le gérant ne peut pas stocker plus de 76 packs dans sa réserve. Avec un tel stocks, quelle est la probabilité qu'un jour donné, il ne puisse pas répondre à la demande ?

2) Il ne souhaite pas remplir complètement sa réserve, car cela rend la manutention difficile. Mais il voudrait limiter à 5 % le risque de rupture de stock. Quel doit être au minimum son stocks quotidien ?

Approximation normale d'une loi binomiale

Exercice 24

On estime à 16 % la proportion de gaucher dans une population. On choisit dans cette population 900 personnes au hasard « avec remise ». Quelle est (à 10^{-2} près) la probabilité qu'il y ait dans cet échantillon :

a) au plus 140 gauchers ?

b) au moins 150 gauchers ?

Exercice 25

Un questionnaire à choix multiples, comprend 36 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Un candidat très ignorant choisit une réponse au hasard à chaque question. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de réponses exactes. Calculer la probabilité qu'il réponde juste à moins 5 questions.

Exercice 26

Pour un certain traitement médical, on a observé que les patients peuvent faire une réaction allergique avec une probabilité de 0,02. On prévoit de traiter 1 225 personnes.
Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 30 qui fassent cette réaction allergique.

Exercice 27

La compagnie aérienne Mankpad Air estime à 0,1 la probabilité qu'un client ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement.
Sur le vol MA 2013, l'avion à une capacité de 300 places. Pour optimiser son remplissage, la compagnie a accepté plus de 300 réservations. Ce faisant, elle court le risque que se présente à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé, auquel cas elle devra indemniser ceux qui ne pourront embarquer.
On note n le nombre de réservations, acceptées par la compagnie, et X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant réservé qui se présentent à l'embarquement. On suppose les comportements des clients indépendants les uns des autres.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.
3) On suppose dans cette question que $n = 324$.
   Quelle est la probabilité que la compagnie ne puisse pas embarquer tous les passagers qui se présentent ?
4) La compagnie souhaite limiter à 1 % le risque de ne pouvoir embarquer tous les passagers qui se présentent.
   Déterminer le nombre maximum de places qu'elles peut proposer à la réservation.

Exercice 28

Pondichéry avril 2013

Une entreprise emploie 220 salariés. La probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant une période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
2) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

   Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Exercice 29

Amérique du Nord mai 2013

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1) Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2) Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3) Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \simeq 0,040$.

Partie B

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $0,913$. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2) Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3) Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice 30

Liban mai 2013

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1) Construire un pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2) Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3) Déterminer la probabilité de l'événement C.
4) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1) On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.

   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

   a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].
   c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

      On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

Exercice 31

Amérique du Nord mai 2014

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mℓ et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mℓ.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mℓ de crème.

1) Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mℓ, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2) La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à $0,06$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$

   a) Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

   b) Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.

   c) En déduire la valeur attendue de σ'.

3) Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.

   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,06$.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

   a) On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

   b) Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Exercice 32

Métropole Septembre 2014

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1) Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

   On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

   a) Déterminer la valeur de λ.

   b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2) Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.
Calculer la probabilité p_1 de l'événement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'événement $\{Z \leqslant 70\}$.

Le restaurant a reçu 81 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

EXERCICE 33

Amérique du Sud novembre 2014

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).
En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410 ; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68 ; 70]$.

1) On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité

$P(410 \leqslant X \leqslant 450)$.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.

Déterminer la valeur de σ, au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0,97$ pour $\beta \simeq 2,17$.

Exercice 34

N[lle] Calédonie novembre 2014

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

b) Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

   Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104\,;\,116]$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « *la glace est commercialisable* » soit égale à $0,98$.