

Limites de fonctions

Opérations sur les limites

EXERCICE I

Fonctions polynômes

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des polynômes suivants :

1) $P(x) = 5x^3 - 3x + 1$

2) $Q(x) = -2x^4 + x^2 + 3$

EXERCICE II

Fonction rationnelles

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

1) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$

3) $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

2) $g(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$

4) $k(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x + 2}$

EXERCICE III

Démontrer une conjecture graphique

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1; 2\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2}{(x - 1)(2 - x)}$

1) Tracer cette fonction sur votre calculatrice. Conjecturer alors les limites en $-\infty$, 1, 2 et $+\infty$. On prendra comme fenêtre $x \in [2; 5]$ et $y \in [-30; 30]$

2) Démontrer ces conjectures.

Limite d'une fonction composée

EXERCICE IV

En vrac

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 5}}$ en $x = 5$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ en $x = 1$

2) $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ en $-\infty$

5) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$ en $+\infty$

3) $f(x) = \sqrt{\frac{-x + 1}{x^2 + 1}}$ en $-\infty$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$ en $-\infty$

7) $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

EXERCICE V**Fonction composée deux fois**

f est une fonction définie sur $] -5; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$
- 2) Trouver la forme algébrique de $f[f(x)]$ puis retrouver le résultat du 1)

EXERCICE VI**Formes indéterminées**

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

1) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ en $-\infty$

3) $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$ en $-\infty$

2) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$

Algorithmique**EXERCICE VII****Courbe asymptote**

f et g sont les fonctions définies sur $] -2, -\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

- 1) Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g . Qu'observe-t-on pour les grande valeurs de x ?
- 2) a) Démontrer que pour tout $x > 2$: $g(x) - f(x) = \frac{4}{x+2}$
 b) En déduire la limite de $g(x) - f(x)$ en $+\infty$.
 c) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonction f et g .
- 3) On considère l'algorithme ci-contre
 - a) Expliquer le rôle de cet algorithme.
 - b) Quelle valeur de x , l'algorithme affiche-t-il lorsque l'on saisit $a = 0,01$?

Entrée et initialisation

Saisir a un nombre positif proche de 0
 x prend la valeur -1

Traitement

Tant que $\frac{4}{x+2} > a$

x prend la valeur $x+1$

FinTantque

Sortie

Afficher x

EXERCICE VIII**Fonction catastrophe**

f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}}$

- 1) A l'aide de votre calculette, déterminer les valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs proche de 0. Recopier et remplir le tableau suivant :

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$							

- 2) En développant $(x^{20} + 100)^2$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.
 3) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.
 4) Comment expliquer cette différence de valeur entre le tableau de valeurs et la limite en 0.

Limites par comparaison**EXERCICE IX****En vrac**

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2 - \cos x}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin x$

EXERCICE X**Asymptotes**

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$

- 1) On a représenté ci-contre la fonction f . Conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$ et les limites à gauche et à droite de 1.
 2) a) Démontrer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ grâce à un encadrement.
 b) Déterminer les limites à gauche et à droite de 1
 c) Interpréter graphiquement les limites obtenues.

