Spirale polygonale
Algorithme

1 Définition

Définition 1 : Une spirale polygonale est engendrée par une suite de points M_n d'affixe z_n tels que : $z_{n+1} = ke^{i\theta}z_n$ avec z_0 donné.

- k : coefficient de réduction $(0 < k < 1)$
- θ : angle de la rotation.
- n : nombre de rotations

Remarque : Une spirale polygonale ressemble au dessin d'une coquille d'escargot.

Conséquence Une spirale polygonale est la représentation d'une suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{C}$ par z_0 et $z_{n+1} = ke^{i\theta}z_n$.

Exemple : Soit (z_n) définie sur $\mathbb{C}$ par : $z_0 = 8$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.

Déterminer le coefficient de réduction et de l'angle de rotation.

On pose $a = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$, on a alors : $k = |a| = \dfrac{\sqrt{9+3}}{4} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{4} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \arg(a) = \theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

La suite (z_n) est donc définie par $z_0 = 8$ et $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} z_n$

2 Algorithme

1) Déterminer un algorithme permettant à l'aide de la suite des points $M_n(z_n)$,
   - de tracer les segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, ..., $[M_{n-1}M_n]$
   - de tracer les segments : $[OM_1]$, $[OM_2]$, $[OM_3]$,..., $[OM_n]$
   - puis de déterminer la somme ℓ_n des longueurs de ces segments :
     $$\begin{aligned} \ell_n &= M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_{n-1}M_n \\ &= |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \cdots + |z_n - z_{n-1}| \end{aligned}$$

2) On reprend l'exemple de la suite (z_n) définie par $z_0 = 8$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$.

   Quelle conjecture sur la limite de la somme ℓ_n peut-on faire ?

1) On peut proposer l'algorithme ci-contre.

   La variable U permet de stocker l'ancienne valeur de Z pour tracer le segment et calculer la somme.

   Si on rentre :

   $Z = 8$, $K = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et $N = 40$

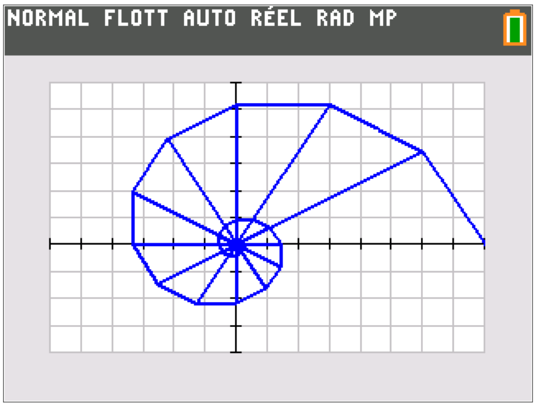
   On trouve alors $\quad S = 29{,}756\,194$

Variables : Z, U complexes
K, θ, N réels
Entrées et initialisation
  Lire Z, K, θ, N
  $0 \to S$
Traitement
  pour I de 1 à N **faire**
    $Z \to U$
    $Ke^{i\theta}Z \to Z$
    Tracer le segment
      $(\mathrm{Re}(U)\,,\mathrm{Im}(U)\,,\mathrm{Re}(Z)\,,\mathrm{Im}(Z))$
    Tracer le segment
      $(0\,,0\,,\mathrm{Re}(Z)\,,\mathrm{Im}(Z))$
    $S + |Z - U| \to S$
  fin
Sorties : Afficher S

on obtient le tableau des valeurs de N

n	50	100	200	500
U	29,828	29,850	29.856	29,856

On peut donc conjecturer que la limite de la somme ℓ_n tend vers 29,856



3 Calcul de la somme

Calcul de la limite de $\quad \ell_n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \cdots + |z_n - z_{n-1}|$

On pose $\quad u_n = |z_{n+1} - z_n|$, $\quad$ on a alors $\quad \ell_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$

Montrons que la suite (u_n) est géométrique :

$u_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |ke^{i\theta}z_{n+1} - ke^{i\theta}z_n| = |ke^{i\theta}||z_{n+1} - z_n| = ku_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = k$, $\;$ la suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = k$ et de premier terme $\quad u_0 = |z_1 - z_0|$

ℓ_n est alors la somme des n premiers termes de la suite géométrique u_n, donc :

$$\ell_n = u_0\frac{1-k^n}{1-k} \quad \text{or} \quad \lim_{n\to+\infty} k^n = 0 \quad \text{car} \quad 0 < k < 1 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{u_0}{1-k}$$

Si l'on revient notre exemple : $\quad z_0 = 8$ et $\quad z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$, on a alors :

$$|z_1 - z_0| = \left| 8\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) - 8 \right| = |6 + 2\sqrt{3}i - 8| = |2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\frac{u_0}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{3}} = 8(2+\sqrt{3}) \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \ell_n = 8(2+\sqrt{3}) \approx 29{,}856$$