Contrôle de mathématiques

Jeudi 31 janvier 2013

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

1) Rappeler les expressions de : $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$
2) Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \ \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

EXERCICE 2

Triangle **(1,5 points)**

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, \quad b = 3i, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

EXERCICE 3

Forme exponentielle **(1,5 points)**

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + i\right)^{2\,013}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de : $-\sqrt{3} + i$
2) Montrer que a est un imaginaire pur

EXERCICE 4

Les parties A et B sont indépendantes **(6 points)**

On considère l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$
où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1) a) Montrer que (E) admet une solution réelle évidente, note z_1.
   b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b)$
2) Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $1,\ 2+2i$ et $1-i$.

1) Représenter A, B et C.
2) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifter.
4) On donne le point D d'affixe 2. Quelle est la nature de OCDB ?

EXERCICE 5

QCM **(8 points)**

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0, 5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

   a) 3 **b)** i **c)** $3+i$

2) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

   a) $|z|+1$ **b)** $|z-1|$ **c)** $|i\bar{z}+1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

   a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b)** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c)** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4) Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

   a) $n=3$ **b)** $n=6k+3,\ k\in\mathbb{N}$ **c)** $n=6k,\ k\in\mathbb{N}$

5) Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est :

   a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB] **c)** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6) Soit Ω le point d'affixe $1-i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x+iy$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :

   a) $y = -x+1$ **b)** $(x-1)^2+y^2 = \sqrt{5}$ **c)** $z = 1-i+5e^{i\theta}$ avec θ réel

7) Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est :

   a) $1-4i$ **b)** $-3i$ **c)** $7+4i$

8) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$ est :

   a) $\{1-i\}$ **b)** L'ensemble vide **c)** $\{1-i\ ;\ 1+i\}$