Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 01 février 2016

EXERCICE 1

ROC et applications **(5 points)**

1) Voir cours

2) **Applications :**

a) $z = \dfrac{5+2i}{1-i} = \dfrac{(5+2i)(1+i)}{1+1} = \dfrac{5+5i+2i-2}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$

b) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{2}i) - 2 = 4i.$

$z^2 = 4i \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

c) $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

$|z^6| = |z|^6 = 2^6 = 64$ et $\arg(z^6) = 6\arg(z) = 6 \times \dfrac{5\pi}{6} = 5\pi = \pi \quad [2\pi]$

$(-\sqrt{3} + i)^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1 + 0i) = -64$

EXERCICE 2

Équation du 3e degré **(6 points)**

1) $f(i) = z^3 - (4\sqrt{3} + i)i^2 + 4(4 + i\sqrt{3})i - 16i$

$= -i + 4\sqrt{3} + i + 16i - 4\sqrt{3}\,i - 16i$

$= 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + i(-1 + 1 + 16 - 16) = 0$

"*Si un polynôme dans $\mathbb{C}$ admet une racine a alors ce polynôme peut se factoriser par* $(z - a)$", donc $f(z)$ peut se factoriser par $(z - i)$

2) a) $(z - i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) = z^3 - 4\sqrt{3}z^2 + 16z - z^2 + 4\sqrt{3}\,i\,z - 16i$

$= z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + \sqrt{3}\,i)z - 16i = f(z)$

b) $f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = i \quad$ et $\quad z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 \quad (1)$

Pour (1) : $\Delta = 48 - 64 = -16 = (4i)^2$ on a $\Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$$

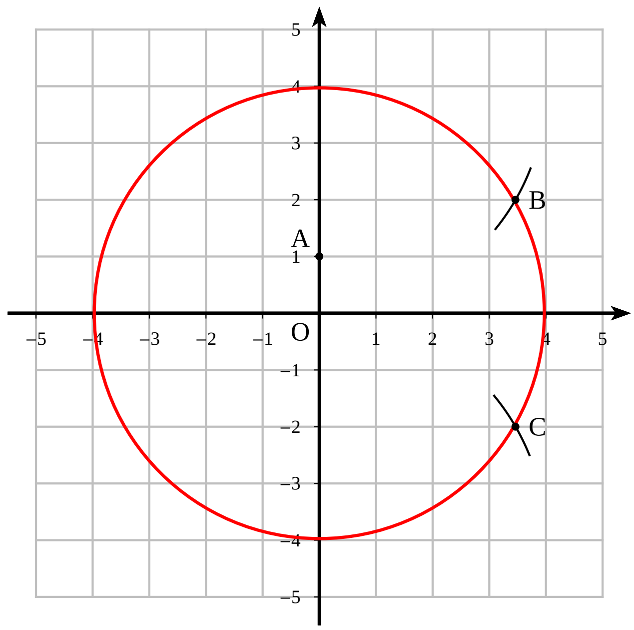
$S = \left\{i\ ;\ 2\sqrt{3} + 2i\ ;\ 2\sqrt{3} - 2i\right\}$

3) a) $|z_0| = 1$ et $\arg(z_0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$|z_1| = \sqrt{12+4} = 4 \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} \ [2\pi]$$

donc $z_1 = 4\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et donc $z_2 = \overline{z_1} = 4\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

b) On pose A(z_0), B(z_1) et C(z_2). On obtient la représentation suivante :



Exercice 3

BAC **(9 points)**

Partie A

1) Comme $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) \geqslant 0$ donc toutes les courbe Γ_a se situe au dessus de l'axe des abscisses.

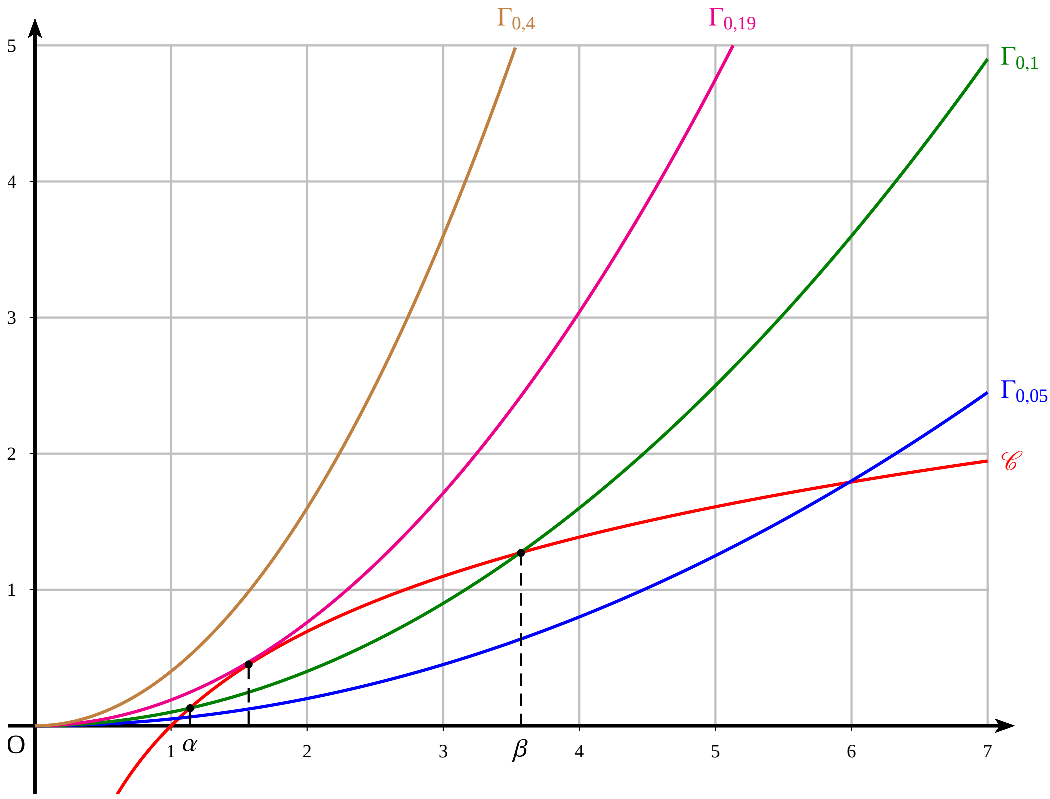
De plus les courbes Γ_a sont des paraboles de sommet O et tournée vers le haut ($a > 0$) et sont d'autant plus évasées que a est petit. Voir les courbe ci-après.

2)
- $\mathscr{C}$ et respectivement $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$ ont deux points d'intersection.
- $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,19}$ n'ont qu'un point d'intersection (les courbes semblent tangentes).
- $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,4}$ n'ont pas de point d'intersection.

En conséquence, on peut faire comme conjecture :
- Si $0 < a < 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a ont deux points d'intersection.
- Si $a = 0,19$, $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,19}$ ont un point d'intersection.
- Si $a > 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont pas de point d'intersection.

Partie B

1) Si M est un point d'intersection avec $\mathscr{C}$ et Γ_a, son abscisse x vérifie :
$\ln x = ax^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - ax^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_a(x) = 0$



2) a) $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$

- $h'_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2ax^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{2a}$

  Comme $x > 0$, une seule solution $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

- Sur $]0\,;+\infty[$, signe de $h'_a(x) =$ signe de $1-2ax^2$

  Le coefficient a devant x^2 étant positif, le signe de $(1-2ax^2)$ est positif si $x < x_0$ et négatif si $x > x_0$

Conclusion : $h'_a(x) > 0$ si $x < \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ et $h'_a(x) < 0$ si $x > \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

L'extremum de h_a est donné par :

$$h_a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \ln\frac{1}{\sqrt{2a}} - a \times \frac{1}{2a} = -\ln\sqrt{2a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2a - \frac{1}{2} = \frac{-1-\ln 2a}{2}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

On change la forme de h_a : $h_a(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - ax\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -ax = -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} - ax = -\infty\end{array}$$

Par produit avec x, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty$

3) a) Si $a = 0,1$, le maximum se situe en $\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}$

Sur $\left]0 \,;\, \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$,

- $h_{0,1}$ est continue car dérivable ;
- $h_{0,1}$ est monotone (croissante) ;
- $h_{0,1}$ change de signe car $\lim\limits_{x \to +\infty} h_{0,1} = -\infty$ et $h_{0,1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \dfrac{-1 - \ln 0,2}{2} \approx 0,305 > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) On cherche un intervalle fermé pour les deux racines ;

- $h_{0,1}(1) = -0,1 < 0$ donc $\alpha \in \left[0,1 \,;\, \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$

  Par l'algorithme de dichotomie, on trouve : $1,3 < \alpha < 1,14$ après 8 itérations
- $h_{0,1}(5) = \ln 5 - 2,5 \approx -0,89 < 0$ donc $\beta \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{0,2}} \,;\, 5\right]$

  Par l'algorithme de dichotomie, on trouve : $3,56 < \beta < 3,57$ après 9 itérations

c) Comme $h_{0,1}(x)$ s'annule deux fois, $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$ ont deux points d'intersection.

4) a) $h_{\frac{1}{2e}}(\sqrt{e}) = \dfrac{-1 - \ln \dfrac{2}{2e}}{2} = \dfrac{-1 + \ln e}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

b) Le maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$ est 0 qui est atteint une seule fois en $\sqrt{e}$ donc $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ n'ont qu'un point d'intersection

Remarque : On pourrait montrer que les deux courbes sont alors tangentes.

5) Pour que les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'aient pas de points d'intersection, il faut que le maximum de h_a soit négatif :

$$\frac{-1 - \ln 2a}{2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - \ln 2a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2a > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2a > \ln e^{-1}$$

Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$2a > e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{e^{-1}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{1}{2e}$$

Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont pas de point d'intersection si $a > \dfrac{1}{2e} \approx 0,184$