Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 29 janvier 2015

EXERCICE 1

ROC **(4 points)**

1) Compléter les égalités suivantes pour x et y réels :

   a) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

   b) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

2) a) On a : $|z_1| = r_1,\ |z_2| = r_2$ et $\arg(z_1) = \theta_1,\ \arg(z_2) = \theta_2$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1\, r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]\\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

   On a donc $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ et $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 \quad [2\pi]$

   b) D'après les règles sur les modules et arguments, on a

   - $z_1 z_2 = 3 \times 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = 6\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$,
   - $z_1^2 = 3^2\, e^{i\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)} = 9\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 9i$,
   - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{3}{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

EXERCICE 2

Transformation dans le plan **(3 points)**

1) $a' = f(1 + 3i) = \dfrac{1 + 3i - 1 + 2i}{1 + 3i - i} = \dfrac{5i}{1 + 2i} = \dfrac{5i(1 - 2i)}{1 + 4} = \dfrac{5i + 10}{5} = 2 + i$

2) Il faut résoudre l'équation :

$$\frac{z - 1 + 2i}{z - i} = 3i \quad\Leftrightarrow\quad z - 1 + 2i = 3iz + 3 \quad\Leftrightarrow\quad z(1 - 3i) = 4 - 2i \quad\Leftrightarrow$$
$$z = \frac{4 - 2i}{1 - 3i} = \frac{(4 - 2i)(1 + 3i)}{1 + 9} = \frac{4 + 12i - 2i + 6}{10} = 1 + i$$

   L'affixe $b' = 1 + i$

EXERCICE 3

Vrai-Faux **(3 points)**

1) **Affirmation 1 : Vraie**

   On cherche la forme exponentielle de : $-1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\,\frac{3\pi}{4}}$
   On a alors : $(-1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{i\left(10\times\frac{3\pi}{4}\right)} = 32\, e^{i\,\frac{15\pi}{2}} = 32\, e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = -32i$
   Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est donc sur l'axe imaginaire.

2) **Affirmation 2 : Fausse**

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. On a alors : $z - \bar{z} = 2iy$ l'équation devient alors :

$2iy + 2 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -2 + 4i \quad \Leftrightarrow \quad y = -1 + 2i$ impossible car $y \in \mathbb{R}$

EXERCICE 4

BAC 2014 **(10 points)**

1) $$\begin{aligned} f(-1 + i\sqrt{3}) &= (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 \\ &= 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

2) $f(z) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 9 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ donc $\Delta < 0$ deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

On détermine la forme exponentielle de z_1 puis on déduit celle de z_2 comme conjuguée de la 1re.

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \quad z_1 = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} \ \text{ d'où } \ z_2 = 2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Sur le graphique, on trace le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 2 et de centre O. On trace la droite d'équation $x = -1$. Les points A et B sont les intersections du cercle $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $x = -1$. A est le point d'ordonnée positive.

3) $f(z) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 9 = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$

Cette équation admets deux solutions complexes conjuguées si, et seulement si, $\Delta < 0$

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 4(9 - \lambda) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 36 + 4\lambda < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda < 32 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 8$$

4) $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2$

On a donc $|f(z) - 8| = |(z + 1)^2| = |z + 1|^2$ donc $|f(z) - 8| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |z + 1|^2 = 3 \quad \Leftrightarrow$ $|z + 1| = \sqrt{3}$

L'ensemble (F) est donc le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$

Pour tracer ce cercle $\mathscr{C}'$ sur l'annexe, on remarquera que le point A est sur ce cercle car $|z_A + 1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

5) a) $f(z) = (x+iy)^2+2(x+iy)+9 = x^2+2ixy-y^2+2x+2iy+9 = (x^2-y^2+9)+i(2xy+2y)$

b) $f(z) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 2xy + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ ou $x = -1$

L'ensemble (E) est donc la réunion de la droite horizontale D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des réels) et de la droite verticale D_2 d'équation $x = -1$

6) Il s'agit de déterminer les intersections du cercle $\mathscr{C}'$ avec l'axe des réels et la droite d'équation $x = -1$

- L'intersection de $\mathscr{C}'$ de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ avec l'axe des réels donne deux points $C_1(-1+\sqrt{3};\ 0)$ et $C_2(-1-\sqrt{3};\ 0)$
- L'intersection de $\mathscr{C}'$ de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ avec la droite verticale d'équation $x=-1$ donne les points A et B car :

$$|z_A+1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad |z_B+1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$