Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 31 janvier 2013

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
2) On calcule :

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right]\\
&= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]
\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit alors :

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

EXERCICE 2

Triangle **(1,5 points)**

On calcule les distances suivantes :

$$\text{AB} = |b-a| = |3i - 1 - i| = |-1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
\text{AC} = |c-a| &= \left|\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} - 1\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - 1\right)\right|\\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1}\\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BC} = |c-b| &= \left|\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - 3\right)\right|\\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{3 + \sqrt{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1}\\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

On a donc : $\text{AB} = \text{AC} = \text{BC}$, ABC est équilatéral

EXERCICE 3

Forme exponentielle **(1,5 points)**

1) $b = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) $\arg(a) = \arg\left(b^{2\,013}\right) = 2\,013 \arg(b) = \dfrac{2\,013 \times 5\pi}{6} = \dfrac{3\,355\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

a est donc un imaginaire pur

Exercice 4

Les parties A et B sont indépendantes **(6 points)**

Partie A

1) a) on a : $1^3 - (4+i)\times 1^2 + (7+i)\times 1 - 4 = 1 - 4 - i + 7 + i - 4 = 0$

On a donc $z_1 = 1$ racine évidente

b) Dans la quantité : $(z-1)(z-2-2i)(az+b)$ le terme du plus haut degré est : az^3 et le terme constant : $b(2+2i)$. En identifiant à (E), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b(2+2i) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{-4}{2+2i} = \dfrac{-2}{1+i} = \dfrac{-2(1-i)}{2} = -1+i \end{cases}$$

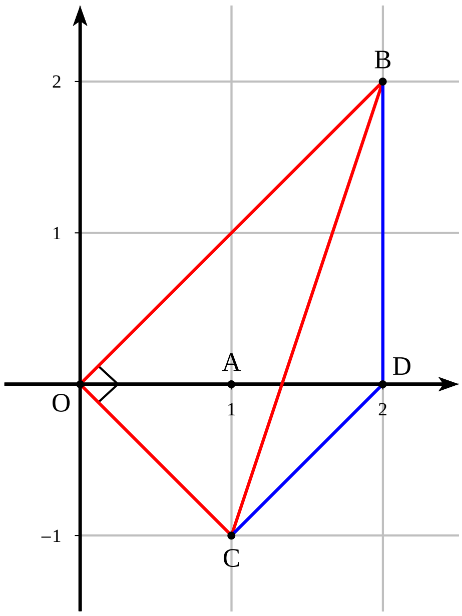
Remarque : On ne pouvait pas uniquement factoriser par $(z-1)$ car on aurait trouvé alors un polynôme du second degré à coefficients non réels que l'on ne sait pas résoudre en terminale.

2) On a (E) : $(z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0$. Cette équation a 3 solutions :

$$z_1 = 1 \quad \text{ou} \quad z_2 = 2+2i \quad \text{ou} \quad z_3 = 1-i$$

Partie B

1) On obtient la figure suivante :



2) On a :

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+2i)(1+i)}{1+1} = \frac{2+2i+2i-2}{2} = 2i$$

$$\frac{2+2i}{1-i} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$$

donc $\arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) = \arg 2i \Leftrightarrow$

$$\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Le triangle OBC est donc rectangle en O.

3) On a : $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \vec{u}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC}\right) = -\arg z_C$

or $z_C = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) = -\arg(z_C) = \dfrac{\pi}{4}$

Comme $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, on a alors

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

La droite (OA) est donc la bissectrice en O du triangle OBC.

4) On a : $z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = 2 - 1 + i = 1 + i$

On a donc : $z_{\overrightarrow{OB}} = 2(1+i) = 2\, z_{\overrightarrow{CD}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{CD}$

Les droites (OB) et (CD) sont parallèles et donc OCDB est un trapèze rectangle (car OCB rectangle).

Exercice 5

QCM **(8 points)**

1) On pose $z = x + iy$, l'équation devient alors :

$$2x + 2iy + x - iy = 9 + i \quad \Leftrightarrow \quad 3x + iy = 9 + i$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a : $x = 3$ et $y = 1$ donc $z = 3 + i$

Réponse c)

2) On a : $|z + i| = |\overline{z + i}| = |\overline{z} - i|$ car $|z| = |\overline{z}|$ or

$$|\overline{z} - i| = |i| \times |\overline{z} - i| = |i(\overline{z} - i)| = |i\overline{z} + 1|$$

Réponse c)

3) on a : $\overline{z} = re^{-i\theta}$ de plus $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$

on a donc : $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\overline{z}} = \dfrac{2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}}{re^{-i\theta}} = \dfrac{2}{r}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)}$

Réponse b)

4) On a :

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^n = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]^n = \left(2\, e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n\, e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

Or un complexe z est un imaginaire pur ssi $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

On a donc : $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 3 + 6k$ comme $n \in \mathbb{N}$ alors $k \in \mathbb{N}$

Réponse b)

5) $|z - i| = |z + 1| \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_A| = |z - z_B| \quad \Leftrightarrow \quad AM = BM$

donc l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB]. Comme O est sur la médiatrice de [AB], l'ensemble des points M est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

Réponse c)

6) $|z-1+i| = |3-4i| \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_\Omega| = \sqrt{9+16} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M = 5$

M est donc sur le cercle de centre Ω et de rayon 5, son affixe z est donc de la forme

$$z - z_\Omega = 5\,e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z = z_\Omega + 5\,e^{i\theta} = 1 - i + 5\,e^{i\theta}$$

Réponse c)

7) ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A ssi :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \quad \Leftrightarrow \quad z_C - z_A = i(z_B - z_A) \quad \Leftrightarrow \quad z_C = z_A + i(z_B - z_A)$$

On a donc : $z_C = 4 + i(3i - 4) = 4 - 3 - 4i = 1 - 4i$

Réponse a)

8) $\dfrac{z-2}{z-1} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0, \quad z - 2 = z^2 - z \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0, \quad z^2 - 2z + 2 = 0$

On calcule : $\Delta = 4 - 8 = -4 = (-2i)^2$ 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

Réponse c)