Devoir à rendre pour le 7 janvier 2013

Exercice I

Equation **2 points**

Résoudre l'équation et le système suivants :

1) $\ln(2x-3)+\ln(x+1)=\ln(x+9)$

2) $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 \\ 3\ln x-5\ln y=4 \end{cases}$

Exercice II

Inéquation du 3e degré **4 points**

Pour tout réel x, on pose : $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$

1) a) Vérifier que $P(-1)=0$

b) En déduire une factorisation de $P(x)$

c) Résoudre alors l'inéquation : $P(x)\leqslant 0$

2) Utiliser les résultats précédents pour résoudre l'inéquation :

$$2\ln x+\ln(2x+5)\leqslant\ln(2-x)$$

Exercice III

Optimisation **8 points**

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $u(x)=x^2-2+\ln x$

1) Étudier les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note α cette solution.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer l'égalité : $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2) En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;

- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1) Montrer que la distance AM est donnée par A$M = \sqrt{f(x)}$.
2) Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.
   a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c) Montrer que AP $= \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

Exercice IV

Algorithme : approximation polynomiale **4 points**

L'algorithme ci-contre permet d'obtenir, pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ;2] un encadrement de $\ln x$ d'amplitude inférieure ou égale à 0,001.

1) On choisit $x = 1,5$. Recopier et compléter le tableau suivant donnant les différentes étapes.

	x	t	s	$s-t$	n
Initialisation	0,5				3
Etape 1	0,5	0,375	0,5	0,125	3
Etape 2	0,5				
Etape 3	0,5				
Etape 4	0,5	0,4053			9

Variables
x, t, s, n
Initialisation
Lire x
n prend la valeur 3
Traitement
x prend la valeur $x-1$
s prend la valeur x
t prend la valeur $x - \dfrac{x^2}{2}$
Tant que $s - t > 0,001$
  s prend la valeur $t + \dfrac{x^n}{n}$
  t prend la valeur $s - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
  n prend la valeur $n+2$
Fin Tantque
Sortie
Afficher t, s et n

2) Avec une amplitude égale à 10^{-5}, quelle valeur de n obtiendra t-on en sortie pour la valeur $x = 1,5$?
3) Pour un nombre x de [1,2], on a obtenu $n = 5$ avec l'algorithme précédent. Donner un encadrement de $\ln x$ par deux fonctions polynômes f et g telles que $f(x) \leqslant \ln x \leqslant g(x)$

Exercice V

Suites **2 points**

(u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

On note (v_n) la suite définie pour tout n par : $v_n = \ln u_n - 2$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser v_0 et sa raison r.
2) En déduire v_n, puis $\ln u_n$, en fonction de n.
3) a) Quelle est la limte de la suite (v_n) ?
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2.