Correction du devoir Du lundi 8 janvier 2018

EXERCICE I

Équations et inéquation **(8 points)**

1) a) $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$

Conditions : $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-3>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x>3 \\ x>-5 \end{cases} \Rightarrow D_f=]3\,;+\infty[$

$x\in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$\ln(2x+1)(x-3)=\ln(x+5)$

$(2x+1)(x-3)=x+5 \Leftrightarrow 2x^2-6x+x-3=x+5$

$2x^2-6x-8=0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2-3x-4=0$

$x_1=-1\notin D_f$ racine évidente $P=-4$ donc $x_2=4\in D_f$

$S=\{4\}$

b) $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$ racines de x^2+5x+6

On a $\Delta=25-24=1$, $x_1=\dfrac{-5+1}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{-5-1}{2}=-3$

Conditions : $\begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x+11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-2\,;+\infty[\\ x>-11 \end{cases} \Rightarrow$

$D_f=]-11\,;-3[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$

$x\in D_f$, la fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$x^2+5x+6=x+11 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

$x_1=1\in D_f$ racine évidente $P=-5$ donc $x_2=-5\in D_f$

$S=\{-5\,;\,1\}$

2) a) $\Delta=169+120=289=17^2$, $X_1=\dfrac{13+17}{10}=3$ et $X_2=\dfrac{13-17}{10}=-\dfrac{2}{5}$

b) α) $5e^{2x}-13e^x-6=0$ on pose $X=e^x$ avec $X>0$

L'équation devient : $5X^2-13X-6=0$ on ne retient que la racine positive :

$X=3 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$ donc $S=\{\ln 3\}$

β) $5(\ln x)^2-13\ln x-6=0$ on pose $X=\ln x$

L'équation devient : $5X^2-13X-6=0$ on retient les deux racines :

$\begin{cases} X=3 \\ X=-\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=3 \\ \ln x=-\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^3 \\ x=e^{-\frac{2}{5}} \end{cases}$ donc $S=\left\{e^{-\frac{2}{5}}\,;\,e^3\right\}$

3) a) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) \leqslant 0$

Condition : $\dfrac{2x+1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(x-1) > 0 \quad$ 2 racines $\ -\dfrac{1}{2}\ $ et $\ 1$

or $\ a = 2$, on prend à l'extérieur des racines : $D_f = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \leqslant \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-1} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1-x+1}{x-1} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-1} \leqslant 0$$

on prend à l'intérieur des racines $S_1 = [-2\,;\,1[$

$S = S_1 \cap D_f = \left[-2\,;-\dfrac{1}{2}\right[$

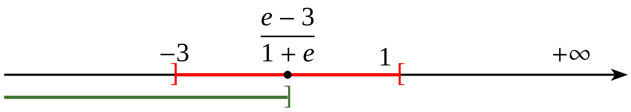
b) $\ln(x+3) \leqslant 1 + \ln(1-x)$

Conditions : $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow D_f =]-3\,;\,1[$

$x \in D_f$, la fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$$\ln(x+3) \leqslant \ln e + \ln(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x+3) \leqslant \ln e(1-x)$$

$$x+3 \leqslant e - ex \quad \Leftrightarrow \quad x(1+e) \leqslant e-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{e-3}{1+e} \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = \left]-\infty\,;\,\frac{e-3}{1+e}\right]$$



$S = S_1 \cap D_f = \left]-3\,;\,\dfrac{e-3}{1+e}\right]$

4) a) $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \geqslant 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad -\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \geqslant -0,05 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,05$

Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, en composant par ln

$$n \ln\frac{5}{6} \leqslant \ln 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n(\ln 5 - \ln 6) \leqslant \ln 0,05 \quad \overset{\ln 5 - \ln 6 < 0}{\Leftrightarrow} \quad n \geqslant \frac{\ln 0,05}{\ln 5 - \ln 6}\ (\approx 16,43)$$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 17$. Le plus petit entier n est donc 17.

b) On peut proposer l'algorithme suivant pour vérifier la solution.

Variables : N : entier
Entrées et initialisation
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^N < 0,95$ **faire**
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

Exercice II

Résolution d'une équation **(6 points)**

1) a) Limite en 0^+, $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$: limite de référence $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

b) $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

c) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$

Comme la fonction ln est croissante, la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ est décroissante.
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2) a) $n < 3 \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant 2 < e \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{e}$.

D'après la question 1), la fonction f a comme maximum $\dfrac{1}{e}$, donc l'équation (E) n'a pas de solution si $n < 3$.

b) On a : $n \geqslant 3 > e \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{n}$.

Sur $]0\,;\,e]$ et sur $[e\,;+\infty[$

- f est continue car dérivable.
- f est monotone respectivement croissante et décroissante.
- $\dfrac{1}{n}$ est respectivement compris :

entre $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$ et entre $f(e) = \dfrac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α_n sur $]0\,;\,e]$ et une unique solution β_n sur $[e\,;+\infty[$.

c) Il faut résoudre $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{5}$.

Pour pouvoir utiliser l'algorithme de dichotomie il faut trouver une valeur supérieur à $\dfrac{1}{5}$ sur $]0\,;\,e]$ et une valeur inférieur à $\dfrac{1}{5}$ sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$

On peut éventuellement s'aider de la représentation de $\mathscr{C}_f$:

$f(1) = 0$ et $f(15) \approx 0,18$ ⚠ il faut entrer la fonction $\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{5}$

$1,295 < \alpha_5 < 1,296$ et $12,712 < \beta_5 < 12,713$

EXERCICE III

Fonction et algorithme **(6 points)**

1) $-2.5 \leqslant x \leqslant 2.5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 6,25 \quad \overset{\times -2}{\Leftrightarrow} \quad -12,5 \leqslant -2x^2 \leqslant 0 \quad \overset{+13,5}{\Leftrightarrow}$

$1 \leqslant -2x^2 + 13,5 \leqslant 13,5 \quad \overset{\ln \nearrow}{\Leftrightarrow} \quad \ln 1 \leqslant \ln(-2x^2 + 13,5) \leqslant \ln 13,5 \quad \Leftrightarrow$

$0 \leqslant f(x) \leqslant \ln 13,5$ donc f est positive ou nulle sur I.

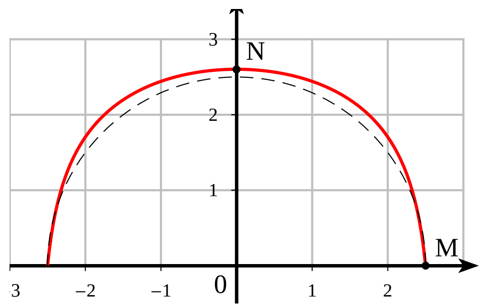
2) $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(-x) = \ln\left[-2(-x)^2 + 13,5\right] = \ln(-2x^2 + 13,5) = f(x)$

La fonction f est paire et donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3) On rappelle que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ donc $f(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2 + 13.5}$.

D'après la question 1), $-2x^2 + 13,5 \geqslant 1 > 0$ donc le signe de f' est le signe de $-4x$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-2,5$		0		$2,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 13,5$	$\searrow$	0



La fonction f est donc bien positive sur I.

4) Si $\mathscr{C}_f$ était un arc de cercle de centre 0 alors on aurait $\mathrm{OM} = \mathrm{ON}$

or $\mathrm{OM} = 2,5$ et $\mathrm{ON} = \ln 13,5 \approx 2,60 \neq \mathrm{OM}$. $\mathscr{C}_f$ n'est pas un arc de cercle.

5) a) Si l'on rentre $n = 50$ on trouve $S = 5,198$.

b) Cet algorithme cherche à calculer une approximation de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les abscisses 0 et 2,5, en découpant celle-ci en n rectangles.