Contrôle de mathématiques

Mardi 09 décembre 2014

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) Prérequis : On admettra que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x > x$

   Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

2) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Exercice 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
   a) $e^{x^2-5} = e^{-4x}$ b) $e^{x+1} \times e^{3x+5} = 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $e^{7-3x^2} > e^{2-2x}$

Exercice 3

Limites - Forme indéterminée. **(3 points)**

Déterminer les limites suivantes en mettant en évidence les limites de référence utilisées.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3xe^{-x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x}$

Exercice 4

Dérivées **(3 points)**

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f,g et h suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$ b) $g(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ c) $h(x) = \dfrac{3e^x}{e^x - 2}$

Exercice 5

Exercice bac **(8 points)**

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe à rendre avec la copie.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1) a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   c) En déduire que $b = -a$.
2) Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)e^x + 1 = 0$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$

1) a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2) a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   Donner une valeur approchée de $\varphi(-2)$ et $\varphi(1)$.
   À l'aide de l'algorithme par dichotomie, donner un encadrement de α et β à 10^{-3}.
   On donnera le nombre de boucles nécessaires à ces encadrements.

Annexe de l'exercice 5
À rendre avec la copie

Prénom :

Nom :