Correction contrôle de mathématiques

Lundi 24 mars 2014

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

1) Voir le cours

2) On pose : $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$. La limite demandée est indéterminée. Pour lever l'indétermination, on change la forme de f en : $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} \times \dfrac{x}{\sin x}$

D'après les deux limites précédentes on :

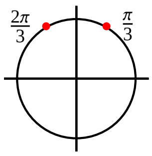
$$\lim_{x\to 0} = \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Par produit, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

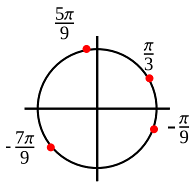
EXERCICE 2

Équations et inéquations trigonométrique **(3 points)**

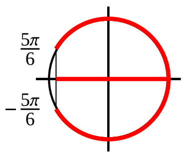
1 a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



b) $\begin{cases} 2x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

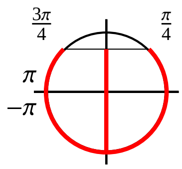


2 a) $\cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$S = \left[-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$

b) $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$S = \left]-\pi; \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$

EXERCICE 3

Fonction trigonométrique **(4 points)**

1) La fonction f est paire et 2π périodoque. En enffet pour tout réel x, on a :

$$f(-x) = \cos(-2x) + 2\cos(-x) = \cos(2x) + 2\cos(x) = f(x)$$
$$f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) + 2\cos(x + 2\pi) = \cos(2x) + 2\cos x = f(x)$$

On pourra étudier la fonction f sur $[0; \pi]$, car la fonction est 2π périodique et sa courbe possède une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2\sin x = -4\sin x\cos x - 2\sin x = -2\sin x(2\cos x + 1)$$

3) a) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = -\dfrac{1}{2}$

Sur $[0; \pi]$, on a les solutions suivantes : 0, π et $\dfrac{2\pi}{3}$

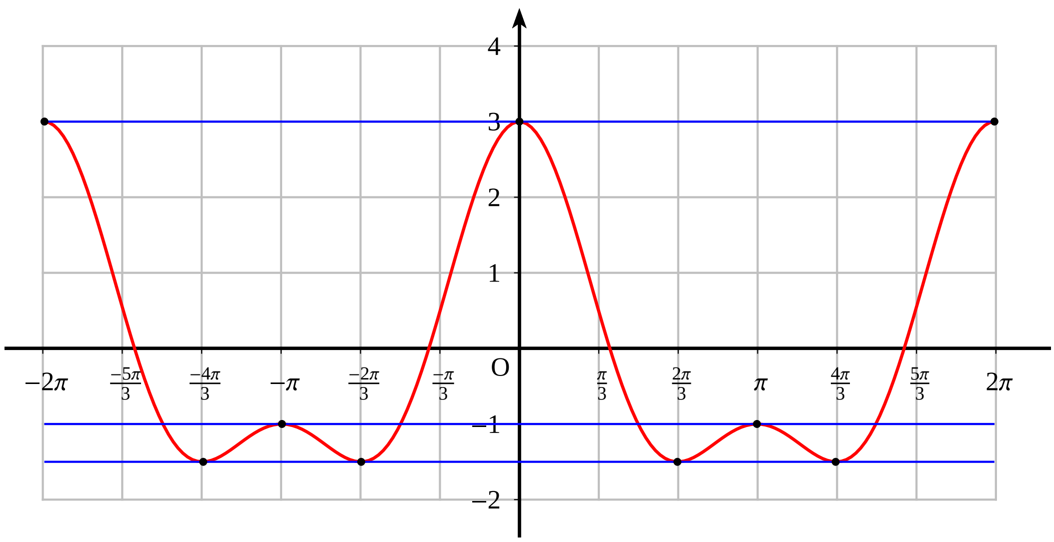
b) Pour déterminer le signe de $f'(x)$, on peut remplir un tableau de signe :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-\sin x$	0	$-$		$-$	0
$2\cos x + 1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

4) En utilisant la symétrie de la fonction, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1

5) On obtient la courbe suivante sur $[-2\pi; 2\pi]$, en utilisant la périodicité.



Exercice 4

Primitives **(5 points)**

1) f est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 1$ donc $F(x) = -\dfrac{1}{u} = -\dfrac{1}{x^2 - 5x + 1}$

2) f est de la forme $\dfrac{2u'}{u}$ avec $u(x) = 2x + 1$ donc $F(x) = 2\ln|u| = 2\ln(2x + 1)$

3) f est de la forme $\dfrac{1}{5}u'e^u$ avec $u(x) = 5x - 1$ donc $F(x) = \dfrac{1}{5}e^u = \dfrac{1}{5}e^{5x-1}$

4) f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x - 5$ donc $F(x) = \ln|u| = \ln(e^x - 5)$

5) f est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = \sin x$ donc $F(x) = \dfrac{u^3}{3} = \dfrac{\sin^3 x}{3}$

Exercice 5

Surface **(5 points)**

1) a) U représente la surface des rectangles hachurés (borne inférieure) et V la surface des rectangles bleus ou grisés (borne supérieure)

   b) On obtient : $U = 0{,}466\,6$ et $V = 0{,}813\,2$

   c) On a alors : $0{,}466\,6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0{,}813\,2$.

   d) Il suffit de remplacer l'instruction "$4 \rightarrow n$" par "Lire n" .
   Avec $n = 14$, on obtient alors : $0{,}587\,0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0{,}686\,1$.

2) a) On dérive la fonction F

$$F'(x) = \frac{2x}{2}\ln x + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x\ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln x = f(x)$$

   La fonction F est donc une primitive de f

   b) $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2\ln 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.