Continuité et dérivabilité d'une fonction

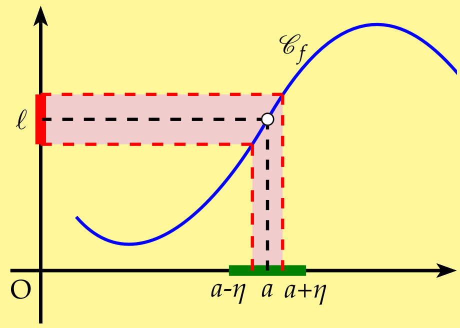
Table des matières

1 Continuité d'une fonction

1.1 Limite finie en un point

Définition 1 : Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en a, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a - c'est à dire pour les x d'un intervalle $]a-\eta; a+\eta[$. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$



Remarque : Parfois la fonction f n'admet pas une limite en a, mais admet une limite à droite et une limite à gauche. C'est le cas de la fonction partie entière E (voir plus loin). On a par exemple : $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2$

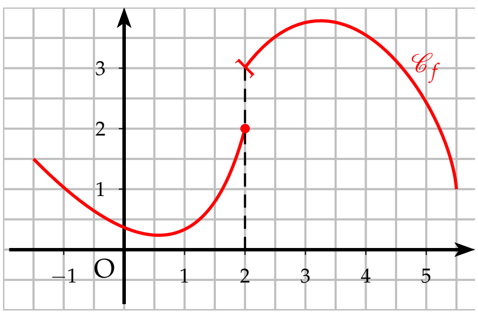
1.2 Continuité en un point

Définition 2 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est **continue** en a si et seulement si :

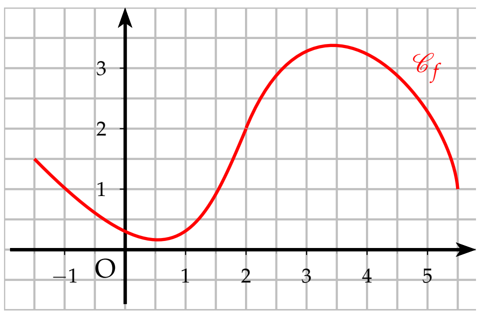
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est **continue sur un intervalle I** si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.



Fonction f discontinue en 2
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



Fonction f continue sur $[-1,5\,;\,5,5]$

La fonction de gauche représente une discontinuité par "saut". C'est le cas par exemple de la fonction partie entière ou plus pratiquement de la fonction qui représente les tarifs postaux en fonction du poids (brusque changement de tarif entre les lettres en dessous de 20 g et de celles entre 20 g et 50 g).

D'autres discontinuités existent. C'est par exemple le cas en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

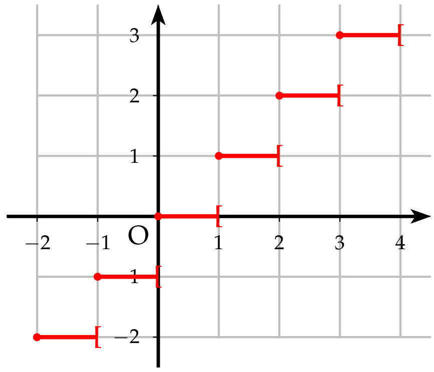
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ \ n \leqslant x < n+1$

La **fonction partie entière** E est alors définie par : $E(x) = n$

$E(2,4) = 2\ ;\ \ E(5) = 5\ ;\ \ E(-1,3) = -2$

Sur la Ti 82, math Num 5 : partEnt.

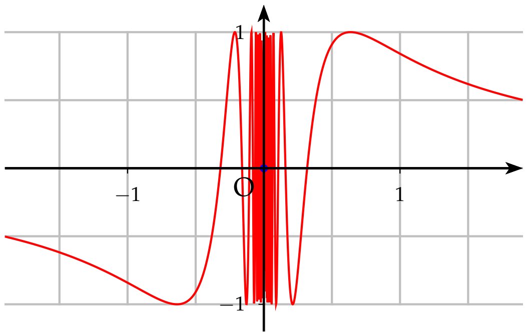
On observe alors un "saut" de la fonction pour chaque entier. La fonction partie entière n'est donc pas continue pour x entier.



Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin \dfrac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0 bien qu'on n'observe ici aucun "saut". La fonction oscille de plus en plus autour de 0 si bien qu'au voisinage de 0, la fonction tend vers une oscillation infinie qui explique la non continuité.



1.3 Continuité des fonctions usuelles

Propriété 1 : Admis

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- D'une façon générale, toutes fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles.

1.4 Théorème du point fixe

Théorème 1 : Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration :

On sait que la suite (u_n) est convergente vers ℓ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

De plus, la fonction f est continue en ℓ donc : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$

Par composition, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ donc $\ell = f(\ell)$

Exemple : Reprénons l'exemple du chapitre 2, soit la suite (u_n)

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

On a montré que la suite (u_n) était positive, croissante et majorée par 4, elle est donc convergente vers ℓ. La fonction $x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est continue sur $[0;4]$, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+4} &= x \quad \text{on élève au carré} \\ 3x + 4 &= x^2 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation a -1 et 4 comme solution. Or on sait que $u_n \geqslant 0$. On en déduit que la seule solution acceptable est 4. La suite (u_n) converge vers 4.

1.5 Continuité et dérivabilité

Théorème 2 : Admis

- Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I.

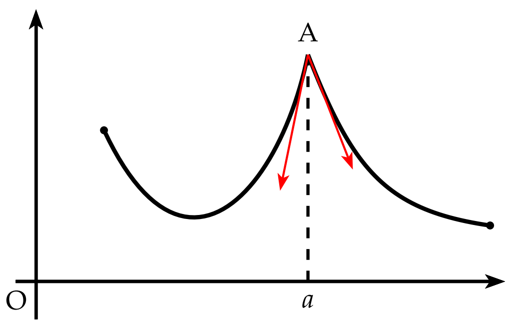
⚠ La réciproque de ce théorème est fausse

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. Pour s'en rendre compte, on peut s'appuyer sur une représentation graphique. Si une fonction est continue sur un intervalle, sa représentation graphique est en un seul morceau. Si la fonction est dérivable, sa représentation graphique admet une tangente en chacun de ses points. Un petit exemple :

La fonction dont la représentation est ci-contre, est bien continue en a, car la courbe est en un seul morceau.

Par contre, la fonction n'est pas dérivable en a, car la représentation admet au point A deux demi-tangentes.

On dit que la courbe admet un point anguleux



La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en 0.

1.6 Continuité et équation

Théorème 3 : Théorème des valeurs intermédiaires

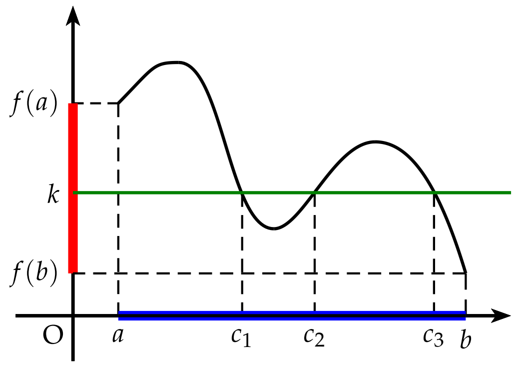
Soit une fonction **continue** sur un intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : Ce théorème est admis.

Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$

Voici une illustration graphique. Ici k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet donc des solutions.

Le fait que c existe ne veut pas dire qu'il soit unique. Dans notre exemple, il existe ainsi trois valeurs pour c.



Théorème 4 : Théorème des valeurs intermédiaires bis

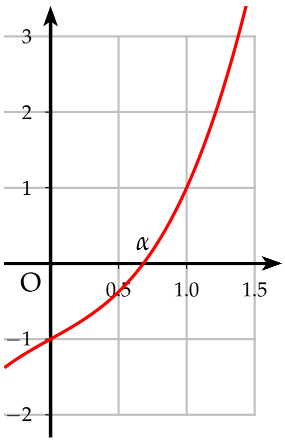
Soit une fonction f **continue et strictement monotone** sur $I = [a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $\mathrm{I} = [a, b]$

Démonstration : L'existence découle du théorème précédent, et l'unicité de la monotonie de la fonction.

Remarque :

- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $I =]a, b[$. k doit alors être compris entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$
- Lorsque $k = 0$, on pourra montrer que $f(a) \times f(b) < 0$.
- Ce théorème est parfois appelé le théorème de la bijection car la fonction réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.
- Un tableau de variation pourra être suffisant pour montrer la continuité et la monotonie de la fonction.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$. On donnera un encadrement à l'unité de cette solution. Trouver ensuite, à l'aide d'un algorithme un encadrement à 10^{-6} de cette solution.



La fonction f est une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

La fonction f est la somme de deux fonctions croissantes $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x - 1$, donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

On a $f(0)$=-1 et $f(1)$=1 $\Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Algorithme : Un algorithme utilisant le principe de **dichotomie** (on divise l'intervalle en deux et on réitère l'opération) permet de trouver une approximation de α à la précision demandée. On pose :

- A et B les bornes de l'intervalle.
- P la précision (entier positif).
- N le nombre d'itérations.

On rentre alors : $A = 0$, $B = 1$, $P = 6$ et $f(x) = x^3 + x - 1$

On obtient alors : $A = 0{,}682\,327$, $B = 0{,}682\,328$ et $N = 20$.

Il faut donc 20 itérations pour obtenir la précision demandée

Variables : A, B, C réels
P, N entiers f fonction
Entrées et initialisation
Lire A, B, P
$0 \to N$
Traitement
tant que $B - A > 10^{-P}$ **faire**
$\frac{A+B}{2} \to C$
si $f(A) \times f(C) > 0$ (*) **alors**
$C \to A$
sinon
$C \to B$
fin
$N + 1 \to N$
fin
Sorties : Afficher : A, B, N

⚠ Cette algorithme ne fonctionne que si $k = 0$, si l'on veut généraliser cet algorithme à un réel k quelconque, on peut :

- demander à lire K et changer la ligne étoilée par : $(f(A) - K) \times (f(C) - K) > 0$
- au lieu de rentrer la fonction f, on rentre la fonction g telle que : $g(x) = f(x) - k$

2 Dérivabilité

2.1 Définition

Définition 3 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I. On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie ℓ en a, c'est à dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

Dans ce cas, on appelle ℓ le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$

Lorsque la fonction f est dérivable sur un intervalle I, on note f', la fonction dérivée qui à tout x de I associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Remarque :

- Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a
- Les physiciens expriment volontiers une variation à l'aide du symbole Δ ; il notent ainsi $\Delta x = x - a$ et $\Delta y = f(x) - f(a)$.
  Pour une variation très petite, on note alors dx et dy. On obtient alors la notation différentielle de la dérivée :

$$f' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$$

Exemple : Soit la fonction par morceaux définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étude de la continuité et de la dérivabilité en 1.

- **Continuité en 1**. La continuité à gauche de 1 ne pose pas de problème, car une fonction polynôme est continue sur $]-\infty; 1]$. Il faut donc étudier la continuité à droite.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-4}{x} = -3 \quad \text{et} \quad f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3$$

  on a donc : $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x-4}{x} = f(1)$ la fonction f est donc continue en 1

- **Dérivabilité en 1**. La dérivabilité à gauche de 1 ne pose pas de problème car une fonction polynôme est dérivable sur $]-\infty; 1]$.

  si $x \leqslant 1$, on a $f'(x) = 2x - 2$ donc $f'_g(1) = 0$

  Pour la dérivabilité à droite, il faut revenir à la définition. On calcule alors :

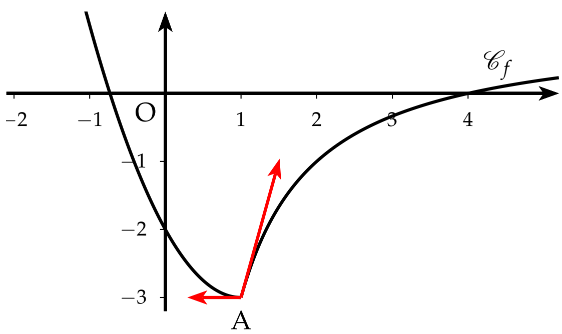
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1+h-4}{1+h} + 3}{h} = \frac{4h}{h(1+h)} = \frac{4}{1+h}$$

  On a donc :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{4}{1+h} = 4 \text{ donc } f'_d(1) = 4$$

  Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ la fonction f n'est pas dérivable en 1.

  Graphiquement la fonction f est en un seul morceau et possède un point anguleux en 1.



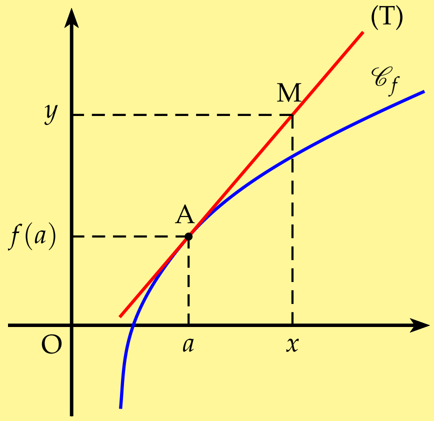
2.2 Interprétations

2.2.1 Interprétation graphique

Théorème 5 :

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$(\text{T}): \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Remarque : Il est important de retenir que le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point.

2.2.2 Interprétation numérique

Théorème 6 : Lorsqu'une fonction f est dérivable en a, une bonne approximation affine, lorsque $a+h$ est voisin de a est :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Exemple : Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4 \quad$ et $\quad h = 0,03$. On calcule alors la dérivée en 4.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$\text{et donc} \quad f(4,03) \approx f(4) + 0,03 \times \frac{1}{4} \approx 2,0075$$

On obtient donc : $\sqrt{4,03} \approx 2,0075$ à comparer à la valeur donnée par la calculatrice 2,007 486. La précision est donc de 10^{-4}.

2.2.3 Interprétation cinématique

Si on appelle $x(t)$ la loi horaire d'un mouvement, alors $x'(t)$ représente la vitesse instantanée à l'instant t. De même, si on appelle $v(t)$ la vitesse instantanée à l'instant t, alors $v'(t)$ représente l'accélération à l'instant t.

Ainsi, avec les notations des physiciens, la vitesse instantanée v et l'accélération a s'écrivent :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.3 Signe de la dérivée, sens de variation

Théorème 7 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est *nulle*, alors la fonction est *constante*.
- Si la fonction dérivée est *strictement positive* (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est *strictement croissante* sur I.
- Si la fonction dérivée est *strictement négative* (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est *strictement décroissante* sur I.

Remarque : Ainsi l'étude des variations d'une fonction dérivable consiste à étudier le signe de la dérivée.

Exemple : Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

Donc

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = 4$
- f' est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-31	$\nearrow$	$+\infty$

2.4 Dérivée et extremum local

Théorème 8 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I. a un point de I.

- Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors la fonction f admet un extremum local en a.

Remarque : Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local (contre-exemple $f(x) = x^3$ en $a = 0$).

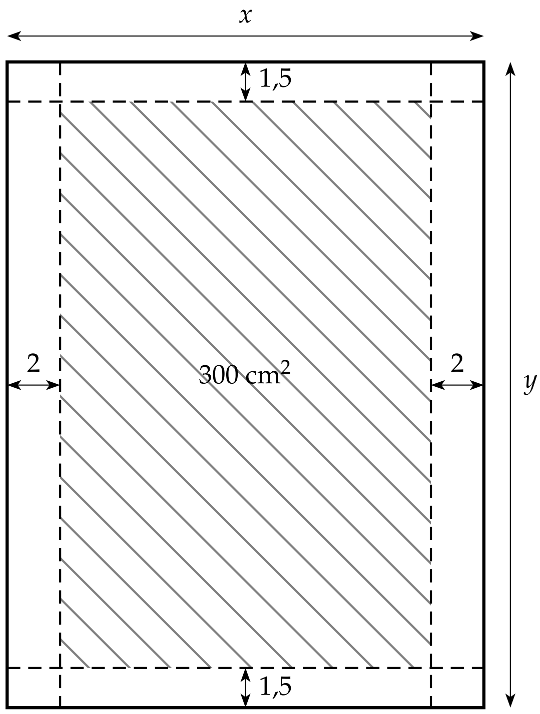
Conséquence Les problèmes d'optimisation consistent à déterminer une fonction dérivable et à déterminer les extremum locaux.

Exemple : Problème de l'éditeur.

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm^2, les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et de 2 cm sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

On appellera x et y les dimensions horizontales et verticales et S la surface totale de la feuille. On cherchera à exprimer y puis S en fonction de x. Comme la consommation de papier est donnée par la surface, on cherchera à déterminer le minimum de S suivant les valeurs de x



La surface imprimée : $(x-4)(y-3) = 300 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{300}{x-4} + 3$

La surface totale : $S(x) = xy = \dfrac{300x}{x-4} + 3x = 3\left(\dfrac{100x}{x-4} + x\right)$

On dérive S : $S'(x) = 3\left(\dfrac{100(x-4) - 100x}{(x-4)^2} + 1\right) = 3\left(\dfrac{-400 + x^2 - 8x + 16}{(x-4)^2}\right)$

$$S'(x) = \frac{3(x^2 - 8x + 384)}{(x-4)^2}$$

On annule S' : $S'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 384 = 0$

d'où $\Delta = 8^2 + 4 \times 384 = 1600 = 40^2$

La racine positive vaut : $x = \dfrac{8+40}{2} = 24$

x	4		24		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La surface totale admet donc un minimum pour $x = 24$, on en déduit alors $y = \dfrac{300}{24-4} + 3 = 18$

Les dimensions de la feuille qui rend la consommation de papier minimum est 24 cm $\times$ 18 cm

2.5 Dérivées des fonctions usuelles

2.5.1 Dérivée des fonctions élémentaires

Voici le tableau des dérivées usuelles ainsi que leurs ensembles de validité.

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

2.5.2 Règles de dérivation

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée autre	$[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$

Remarque : Les trois dernières règles de dérivation sont nouvelles

2.5.3 Exemples

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (3x-5)^4$ b) $g(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ c) $h(x) = \sin(2x+1)$

Ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car somme, produit et composée de fonctions dérivables. On obtient alors :

a) $f'(x) = 4 \times 3(3x-5)^3 = 12(3x-5)^3$

b) $g'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

c) $h'(x) = 2\cos(2x+1)$